

Exercice 1

1. Comme $t \mapsto e^{-t}$ est décroissante sur $\mathbb{R}$, $F(t)$ est croissante. De plus, elle est continue donc càdlàg et $\lim_{t \rightarrow -\infty} F(t) = 0$, $\lim_{t \rightarrow +\infty} F(t) = 1$.

D'après le cours, F est bien la fonction de répartition d'une v.a réelle Z .

Par ailleurs, F est en fait de classe C^∞ donc C^1 , toujours d'après le cours, la variable Z est donc à densité de densité

$$f_Z(t) = F'(t) = (e^{-e^{-t}})' = e^{-e^{-t}} e^{-t} = e^{-(t+e^{-t})}.$$

2. Si $X \sim \mathcal{E}(1)$ alors $F_X(t) = \int_{-\infty}^t f_X(s) ds$
$$= \int_{-\infty}^t e^{-s} \mathbb{1}_{s \geq 0} ds = \int_0^t e^{-s} ds = 1 - e^{-t}.$$

3. Les variables (X_i) étant indépendantes et de même loi

$$\begin{aligned} P(Z_n \leq t) &= P(\max_{1 \leq i \leq n} X_i \leq t + \log(n)) \\ &= P(X_i \leq t + \log(n), 1 \leq i \leq n) \\ &\stackrel{1}{=} P(X_1 \leq t + \log(n))^n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{Ainsi } P(Z_n \leq t) &= F_X(t + \log(n))^n \\
 &= (1 - e^{-(t + \log(n))})^n \\
 &= \left(1 - \frac{e^{-t}}{n}\right)^n
 \end{aligned}$$

h. Lorsque n tend vers l'infini, on a ainsi:

$$F_{Z_n}(t) = P(Z_n \leq t) = \left(1 - \frac{e^{-t}}{n}\right)^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} e^{-e^{-t}}.$$

La loi limite des Z_n est la loi de Gumbel.

Exercice 2

1. Si $U \sim U_{[0,1]}$ et $Z = -2 \log(1-U)$ alors Z est positive (car le $\log$ est négatif) et pour $t \geq 0$

$$F_Z(t) = P(Z \leq t) = P(-2 \log(1-U) \leq t)$$

$$= P(\log(1-U) \geq -\frac{t}{2})$$

$$= P(1-U \geq e^{-t/2}) = P(U \leq 1 - e^{-t/2})$$

$$= 1 - e^{-t/2}.$$

La fonction de répartition de Z est de classe C^1
donc Z admet une densité f_Z telle que

$$f_Z(t) = F_Z'(t) = \begin{cases} \frac{1}{2} e^{-t/2} & \text{si } t \geq 0. \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On reconnaît P. Poi. exponentielle $E(\frac{1}{2})$.

2. La variable $R = \sqrt{Z}$ est positive et pour
 $t \geq 0$ on a

$$\begin{aligned} F_R(t) &= P(R \leq t) = P(\sqrt{Z} \leq t) = P(Z \leq t^2) \\ &= F_Z(t^2) = 1 - e^{-t^2/2}. \end{aligned}$$

À nouveau, F_R est de classe C^1 donc R admet
une densité $f_R(t) = F_R'(t) = \begin{cases} t e^{-t^2/2} & \text{si } t \geq 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$

3. La variable $2\pi V$ suit P. Poi. uniforme sur $[0, 2\pi]$
donc elle a pour densité $f_V(x) = \frac{1}{2\pi} \mathbb{1}_{[0, 2\pi]}(x)$

On a vu que R a pour densité $f_R(r) = r e^{-r^2/2} \mathbb{1}_{r \geq 0}$.

Comme les variables U et V sont indépendantes, les variables R et $2\pi V$ le sont également. D'après le cours, le couple $(R, 2\pi V)$ est alors à densité de densité

$$\begin{aligned} f_{(R, 2\pi V)}(r, \theta) &= f_R(r) \cdot f_V(\theta) \\ &= r e^{-\frac{r^2}{2}} \mathbb{1}_{r \geq 0} \frac{1}{2\pi} \mathbb{1}_{(0, 2\pi)}(\theta). \end{aligned}$$

h. On considère l'application φ

$$\begin{aligned} \varphi:]0, +\infty[\times]0, 2\pi[&\rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \\ (r, \theta) &\rightarrow (x, y) = (r \cos(\theta), r \sin(\theta)) \end{aligned}$$

φ est un C^1 difféomorphisme qui correspond bien sûr au changement de coordonnées polaires. Le changement d'élément d'aire associé (Jacobien) est alors $dx dy = r dr d\theta$

D'après le cours $(X, Y) = \varphi(R, 2\pi V)$ est à densité de densité

$$f_{(X, Y)}(x, y) = \frac{e^{-\frac{x^2 + y^2}{2}}}{2\pi}.$$

On pourrait également raisonner avec les fonctions law ,
 si $h: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ est continue bornée

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[h(x, y)] &= \mathbb{E}[h(R \cos(2\pi V), R \sin(2\pi V))] \\ &= \int_0^{+\infty} \int_0^{2\pi} h(r \cos(\theta), r \sin(\theta)) f_{R, 2\pi V}(r, v) dr dv \\ &= \int_0^{+\infty} \int_0^{2\pi} h(r \cos(\theta), r \sin(\theta)) \frac{e^{-r^2/2}}{2\pi} r dr d\theta \end{aligned}$$

$$\begin{cases} x = r \cos(\theta) \\ y = r \sin(\theta) \end{cases} = \int_{\mathbb{R}^2} h(x, y) \frac{e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}}{2\pi} dx dy$$

matrice jacobienne $\begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -r \sin \theta & r \cos \theta \end{pmatrix}$ de
 déterminant r ,

de sorte que le jacobien du changement de
 coordonnées inverse $(x, y) \rightarrow \left(\sqrt{x^2+y^2}, \arctan\left(\frac{y}{x}\right) \right)$
 est $\frac{1}{r}$.

On retrouve bien $dx dy = r dr d\theta$
 ie $dx dy = r dr d\theta$.

5. La densité $f(x,y)$ se factorise

$$f(x,y)(u,y) = f_x(x) f_y(y) \text{ avec}$$

$$f_x(x) = \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}, \quad f_y(y) = \frac{e^{-\frac{y^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}},$$

d'après le cours, x et y sont indépendantes de loi respectives $\mathcal{N}(0,1)$.

Exercice 3

1. On calcule

$$E\left[\left(\sum_{i=1}^n X_i\right)^4\right] = E\left[\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i\right)^4\right]$$

$$\stackrel{\text{linéarité}}{\rightarrow} = \frac{1}{n^4} \sum_{i,j,k,l=1}^n E[X_i X_j X_k X_l].$$

Or par indépendance et comme les X_i sont centrés,

$$\text{on a } E[X_i X_j X_k X_l] = 0$$

sauf si 2 paires d'indices coïncident.

$$\text{Aussi cas } E[X_i^2 X_j^2] = 1.$$

$$\text{On a donc } E\left[\left(\sum_{i=1}^n X_i\right)^4\right] = \frac{1}{n^4} \sum_{i,j=1}^n 1 = \frac{1}{n^2}.$$

2. D'après l'inégalité de Markov, pour $\varepsilon > 0$

$$\begin{aligned} P\left(\left|\frac{S_n}{n}\right| > \varepsilon\right) &= P\left(\left|\frac{S_n}{n}\right|^4 > \varepsilon^4\right) \\ &\leq \frac{E[(S_n/n)^4]}{\varepsilon^4} = \frac{1}{\varepsilon^4 n^2}. \end{aligned}$$

Par suite $\sum_{n \geq 1} P\left(\left|\frac{S_n}{n}\right| > \varepsilon\right) < \infty$.

3. D'après le lemme de Borel-Cantelli, on a alors

$$P\left(\liminf_n \left\{\left|\frac{S_n}{n}\right| > \varepsilon\right\}\right) = 0$$

Autrement dit, avec probabilité 1,
 $\left|\frac{S_n}{n}\right| < \varepsilon$ à partir d'un certain rang.

Ceci étant vrai pour tout $\varepsilon \in \mathbb{R}^{++} \cap \mathbb{Q}$ on conclut que avec probabilité 1, $\frac{S_n}{n}$ tend vers zéro.