

CONTRÔLE CONTINU # 2

Durée : 1h00, documents interdits.

Exercice 1 (Question de cours).

Sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, rappeler la définition de l'indépendance de deux variables aléatoires réelles $X : (\Omega, \mathcal{F}) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ et $Y : (\Omega, \mathcal{F}) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, puis donner deux caractérisations équivalentes.

Par définition, les variables X et Y sont indépendantes si pour tout $A, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, on a

$$\mathbb{P}_{(X,Y)}(A \times B) = \mathbb{P}(\{X \in A\} \cap \{Y \in B\}) = \mathbb{P}(\{X \in A\}) \times \mathbb{P}(\{Y \in B\}) = \mathbb{P}_X(A) \mathbb{P}_Y(B),$$

autrement dit, les variables X et Y sont indépendantes si $\mathbb{P}_{(X,Y)} = \mathbb{P}_X \otimes \mathbb{P}_Y$. Via les fonctions test, X est indépendante de Y si et seulement si, pour toutes fonctions continues bornées f et g on a

$$\mathbb{E}[f(X)g(Y)] = \mathbb{E}[f(X)] \mathbb{E}[g(Y)].$$

De manière équivalente, via les fonctions caractéristiques, X est indépendante de Y si et seulement si pour tout $(t, s) \in \mathbb{R}^2$

$$\varphi_{(X,Y)}(t, s) = \mathbb{E}[e^{itX+isY}] = \mathbb{E}[e^{itX}] \mathbb{E}[e^{isY}] = \varphi_X(t) \varphi_Y(s).$$

Exercice 2 (Identification de loi).

Soit (U, V) un couple de variables aléatoires réelles de densité

$$f_{(U,V)}(u, v) = \frac{1}{2v} e^{-\sqrt{u}(\sqrt{v} + \frac{1}{\sqrt{v}})} \mathbb{1}_{u \geq 0, v \geq 0},$$

par rapport à la mesure de Lebesgue dans $\mathbb{R}^2$.

1. Déterminer la loi du couple $(X, Y) = (\sqrt{UV}, \sqrt{U/V})$. Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?

Soit $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue bornée. On a alors

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[h(X, Y)] &= \mathbb{E}\left[h\left(\sqrt{UV}, \sqrt{U/V}\right)\right] = \int_{\mathbb{R}^2} h(\sqrt{uv}, \sqrt{u/v}) f_{(U,V)}(u, v) du dv \\ &= \int_{u,v \geq 0} h(\sqrt{uv}, \sqrt{u/v}) \frac{1}{2v} e^{-\sqrt{u}(\sqrt{v} + \frac{1}{\sqrt{v}})} du dv. \end{aligned}$$

On pose alors le changement de variables $x = \sqrt{uv}$, $y = \sqrt{u/v}$ de sorte que $u = xy$ et $v = x/y$. Le jacobien associé est

$$|J| = \left| \det \begin{pmatrix} y & x \\ 1/y & -x/y^2 \end{pmatrix} \right| = 2 \left| \frac{x}{y} \right|,$$

de sorte que

$$\mathbb{E}[h(X, Y)] = \int_{x, y \geq 0} h(x, y) \frac{y}{2x} e^{-(x+y)} \left(2 \left| \frac{x}{y} \right| \right) dx dy = \int_{\mathbb{R}^2} h(x, y) \underbrace{e^{-x} \mathbf{1}_{x \geq 0} e^{-y} \mathbf{1}_{y \geq 0}}_{\text{densité du couple}} dx dy.$$

On reconnaît ici la densité d'un couple de variables indépendantes (densité du couple = produit des densités), de même loi exponentielle $\mathcal{E}(1)$.

2. En passant par les fonctions caractéristiques, déterminer la loi de $Z = X - Y$.

On commence par calculer la fonction caractéristique de X , pour $t \in \mathbb{R}$, on a

$$\varphi_X(t) = \mathbb{E}[e^{itX}] = \int_0^{+\infty} e^{itx} e^{-x} dx = \left[\frac{e^{(it-1)x}}{it-1} \right]_0^{+\infty} = \frac{1}{1-it}.$$

On déduit alors par indépendance

$$\begin{aligned} \varphi_{X-Y}(t) &= \varphi_X(t) \varphi_{-Y}(t) = \varphi_X(t) \varphi_Y(-t) = \varphi_X(t) \varphi_X(-t) \\ &= \varphi_X(t) \overline{\varphi_X(t)} = |\varphi_X(t)|^2 = \frac{1}{1+t^2}. \end{aligned}$$

On reconnaît la fonction caractéristique d'une loi de Laplace.

Exercice 3 (Vers un résultat de densité).

On considère $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes, de même loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0, 1[$, i.e. $\mathbb{P}(X_n = 0) = 1 - p$ et $\mathbb{P}(X_n = 1) = p$. On pose $S_n := X_1 + \dots + X_n$.

1. Expliciter la loi de S_n en justifiant votre réponse.

La loi de S_n est la loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$. Par exemple, en considérant les fonctions caractéristiques, comme les X_i sont i.i.d et via la formule du binôme de Newton, on a pour $t \in \mathbb{R}$

$$\varphi_{S_n}(t) = \varphi_{X_1}(t)^n = ((1-p) + pe^{it})^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} e^{ikt},$$

qui est bien la fonction caractéristique de la loi $\mathcal{B}(n, p)$.

2. Calculer l'espérance et la variance de $\frac{S_n}{n}$. Vérifier que $\text{var}\left(\frac{S_n}{n}\right) \leq \frac{1}{4n}$.

Par linéarité de l'espérance, on a

$$\mathbb{E}\left[\frac{S_n}{n}\right] = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \mathbb{E}[X_k] = p.$$

Comme les variables X_k sont indépendantes, on a par ailleurs

$$\text{var}\left(\frac{S_n}{n}\right) = \frac{1}{n^2} \text{var}\left(\sum_{k=1}^n X_k\right) = \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n \text{var}(X_k) = \frac{\text{var}(X_1)}{n}.$$

Or $\text{var}(X_1) = p(1-p) \leq 1/4$, d'où le résultat.

3. Soit $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Montrer que $\mathbb{E} \left[f \left(\frac{S_n}{n} \right) \right]$ est un polynôme de degré au plus n en la variable p , noté $B_n(p)$ dans la suite.

Par la formule de transfert, on a

$$B_n(p) := \mathbb{E} \left[f \left(\frac{S_n}{n} \right) \right] = \sum_{k=0}^n f \left(\frac{k}{n} \right) \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k},$$

qui est bien un polynôme de degré au plus n en la variable p (quitte à développer $(1-p)^{n-k}$ via la formule du binôme).

4. On désigne par $\|f\|_\infty$ la norme uniforme de f sur $[0, 1]$ et par $\omega_f(\delta)$ son module de continuité

$$\omega_f(\delta) := \sup_{\substack{0 \leq u, v \leq 1 \\ |u-v| \leq \delta}} \{|f(u) - f(v)|\}, \quad \delta > 0.$$

Montrer que, pour tout $p \in [0, 1]$ et tout $\delta > 0$,

$$|f(p) - B_n(p)| \leq \omega_f(\delta) \mathbb{P} \left(\left| \frac{S_n}{n} - p \right| \leq \delta \right) + 2\|f\|_\infty \mathbb{P} \left(\left| \frac{S_n}{n} - p \right| > \delta \right).$$

Par l'inégalité triangulaire, on a

$$|f(p) - B_n(p)| = |f(p) - \mathbb{E} \left[f \left(\frac{S_n}{n} \right) \right]| = |\mathbb{E} [f(p) - f \left(\frac{S_n}{n} \right)]| \leq \mathbb{E} [|f(p) - f \left(\frac{S_n}{n} \right)|].$$

On découpe ensuite l'espérance selon la partition $\left| \frac{S_n}{n} - p \right| \leq \delta$ ou $\left| \frac{S_n}{n} - p \right| > \delta$. Il vient alors

$$\begin{aligned} |f(p) - B_n(p)| &\leq \mathbb{E} \left[\left| f(p) - f \left(\frac{S_n}{n} \right) \right| \mathbf{1}_{\left| \frac{S_n}{n} - p \right| \leq \delta} \right] + \mathbb{E} \left[\left| f(p) - f \left(\frac{S_n}{n} \right) \right| \mathbf{1}_{\left| \frac{S_n}{n} - p \right| > \delta} \right] \\ &\leq \omega_f(\delta) \mathbb{E} \left[\mathbf{1}_{\left| \frac{S_n}{n} - p \right| \leq \delta} \right] + 2\|f\|_\infty \mathbb{E} \left[\mathbf{1}_{\left| \frac{S_n}{n} - p \right| > \delta} \right] \\ &= \omega_f(\delta) \mathbb{P} \left(\left| \frac{S_n}{n} - p \right| \leq \delta \right) + 2\|f\|_\infty \mathbb{P} \left(\left| \frac{S_n}{n} - p \right| > \delta \right). \end{aligned}$$

5. En déduire que, pour tout $p \in [0, 1]$, on a

$$|f(p) - B_n(p)| \leq \omega_f(\delta) + \frac{\|f\|_\infty}{2n\delta^2}.$$

Que vaut $\lim_{n \rightarrow \infty} \|f - B_n\|_\infty$? Quel résultat remarquable vous évoque cette limite?

On a naturellement $\mathbb{P} \left(\left| \frac{S_n}{n} - p \right| \leq \delta \right) \leq 1$. Par ailleurs, d'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev et la majoration de la question 2),

$$\mathbb{P} \left(\left| \frac{S_n}{n} - p \right| > \delta \right) \leq \frac{\text{var} \left(\frac{S_n}{n} \right)}{\delta^2} \leq \frac{1}{4\delta^2 n}.$$

Ainsi, on a bien uniformément en p

$$|f(p) - B_n(p)| \leq \omega_f(\delta) + \frac{\|f\|_\infty}{2n\delta^2}.$$

En prenant la limite supérieure en n , il vient alors pour tout $\delta > 0$

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} \|f - B_n\|_\infty \leq \omega_f(\delta).$$

En faisant tendre δ vers zéro (la fonction f est continue donc son module de continuité tend vers zéro), on conclut que $\limsup_{n \rightarrow +\infty} \|f - B_n\|_\infty = 0$, autrement dit on a montré (de façon effective et quantifiable) le théorème de Stone–Weierstrass : sur un compact, les fonctions polynomiales sont denses dans l'ensemble des fonctions continues pour la norme uniforme.