Université de Rennes — L3 Mathématiques

Probabilités — année 2024-2025

Contrôle continu # 2

Durée : 1h00, documents interdits.

Exercice 1 (Question de cours).

Sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, *rappeler la définition de l'indépendance de deux variables aléatoires réelles* $X : (\Omega, \mathcal{F}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ *et* $Y : (\Omega, \mathcal{F}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, *puis donner deux caractérisations équivalentes.*

Exercice 2 (Identification de loi).

Soit (U, V) *un couple de variables aléatoires réelles de densité*

$$f_{(U,V)}(u, v) = \frac{1}{2v} e^{-\sqrt{u}(\sqrt{v}+\frac{1}{\sqrt{v}})} \mathbb{1}_{u \geq 0, v \geq 0},$$

par rapport à la mesure de Lebesgue dans $\mathbb{R}^2$.

1. *Déterminer la loi du couple* $(X, Y) = (\sqrt{UV}, \sqrt{U/V})$. *Les variables* X *et* Y *sont-elles indépendantes ?*
2. *En passant par les fonctions caractéristiques, déterminer la loi de* $Z = X - Y$.

Exercice 3 (Vers un résultat de densité).

On considère $(X_n)_{n \geq 1}$ *une suite de variables aléatoires indépendantes, de même loi de Bernoulli de paramètre* $p \in]0, 1[$, *i.e.* $\mathbb{P}(X_n = 0) = 1 - p$ *et* $\mathbb{P}(X_n = 1) = p$. *On pose* $S_n := X_1 + \ldots + X_n$.

1. *Expliciter la loi de* S_n *en justifiant votre réponse.*
2. *Calculer l'espérance et la variance de* $\frac{S_n}{n}$. *Vérifier que* $\mathrm{var}(\frac{S_n}{n}) \leq \frac{1}{4n}$.
3. *Soit* $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ *une fonction continue. Montrer que* $\mathbb{E}\left[f\left(\frac{S_n}{n}\right)\right]$ *est un polynôme de degré au plus* n *en la variable* p, *noté* $B_n(p)$ *dans la suite.*
4. *On désigne par* $\|f\|_\infty$ *la norme uniforme de* f *sur* $[0, 1]$ *et par* $\omega_f(\delta)$ *son module de continuité*
$$\omega_f(\delta) := \sup_{\substack{0 \leq u,v \leq 1 \\ |u-v| \leq \delta}} \{|f(u) - f(v)|\}, \quad \delta > 0.$$
Montrer que, pour tout $p \in [0, 1]$ *et tout* $\delta > 0$,
$$|f(p) - B_n(p)| \leq \omega_f(\delta)\, \mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{n} - p\right| \leq \delta\right) + 2\|f\|_\infty\, \mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{n} - p\right| > \delta\right).$$
5. *En déduire que, pour tout* $p \in [0, 1]$, *on a*
$$|f(p) - B_n(p)| \leq \omega_f(\delta) + \frac{\|f\|_\infty}{2n\delta^2}.$$
Que vaut $\lim_{n \to \infty} \|f - B_n\|_\infty$ *? Quel résultat remarquable vous évoque cette limite ?*