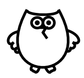
Université de Rennes — Probabilités | L3 Mathématiques — année 2023-2024

UNIVERSITÉ DE RENNES
PROBABILITÉS

L3 MATHÉMATIQUES
ANNÉE 2023-2024

CONTRÔLE CONTINU # 2

Durée : 1h00, documents interdits.



Ne traitez les questions “bonus” qu'après avoir fait tout ce que savez faire dans les questions “classiques”.

Exercice 1 (Lois stables).

On considère une variable aléatoire réelle symétrique non nulle X, autrement dit X a même loi que $-X$. On suppose par ailleurs que X est $\alpha-$stable, pour un réel $0 < \alpha \leq 2$, ce qui signifie que si $(X_i)_{1 \leq i \leq n}$ sont des copies indépendantes de X, alors pour tout $n \geq 1$, on a l'égalité en loi

$$X_1 + X_2 + \ldots + X_n \overset{loi}{=} n^{\frac{1}{\alpha}} X.$$

1. *Écrire une équation fonctionnelle vérifiée par la fonction caractéristique φ_X de X.*
2. *En déduire que pour tout couple d'entiers $p, q \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$, on a $\varphi_X\left(\left(\frac{p}{q}\right)^{\frac{1}{\alpha}}\right) = \varphi_X(1)^{\frac{p}{q}}$.*
3. *En conclure qu'il existe $c > 0$ tel que $\varphi_X(t) = e^{-c|t|^\alpha}$ pour $t \in \mathbb{R}$.*
4. *Question bonus : si X est une variable symétrique non nulle telle que $\varphi_X(t) = e^{-c|t|^\alpha}$ pour $\alpha, c > 0$, montrer que X est $\alpha-$stable et que l'on a nécessairement $0 < \alpha \leq 2$.*

Exercice 2 (Séries aléatoires).

On considère deux suites $(X_n)_{n \geq 1}$ et $(Y_n)_{n \geq 1}$ de variables aléatoires, toutes indépendantes et de loi respectives

$$\mathbb{P}(X_n = 1) = \frac{1}{n^2}, \quad \mathbb{P}(X_n = 0) = 1 - \frac{1}{n^2}, \quad \mathbb{P}(Y_n = 1) = \frac{1}{n}, \quad \mathbb{P}(Y_n = 0) = 1 - \frac{1}{n}.$$

Pour $n \geq 1$, on pose alors $S_n := \sum_{i=1}^n X_i$ et $T_n := \sum_{i=1}^n Y_i$.

1. *Via un lemme du cours, montrer que la suite $(S_n)_{n \geq 1}$ est presque sûrement constante à partir d'un certain rang et converge donc presque sûrement lorsque n tend vers l'infini.*
2. *On note $\tau = \sup\{n \geq 1, X_n = 1\}$. Montrer que pour $k \geq 1$, on a $\mathbb{P}(\tau \leq k) = \prod_{\ell \geq k} \left(1 - \frac{1}{\ell^2}\right)$.*
3. *En utilisant l'inégalité $\log(1 - x) \leq -x$ pour $0 < x < 1$, montrer que $\mathbb{P}(\tau \leq k) \leq e^{-\frac{1}{k}}$.*
4. *En déduire τ est fini presque sûrement mais que l'on a $\mathbb{E}[\tau] = +\infty$.*
5. *Déterminer l'espérance de T_n et donner un équivalent lorsque n tend vers l'infini.*
6. *Déterminer la variance de T_n et donner un équivalent lorsque n tend vers l'infini.*
7. *Expliciter les fonctions caractéristiques φ_{Y_i} et en déduire l'expression de φ_{T_n}.*
8. *Question bonus : montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\varphi_{T_n/\log(n)}(t)$ converge lorsque n tend vers l'infini et expliciter sa limite.*
9. *Question double bonus : on pose $Z_n := (T_n - \mathbb{E}[T_n])/\sqrt{var(T_n)}$. Montrer que pour $t \in \mathbb{R}$, $\varphi_{Z_n}(t)$ converge lorsque n tend vers l'infini, vers une limite que l'on explicitera.*