UNIVERSITÉ DE RENNES
PROBABILITÉS

L3 MATHÉMATIQUES
ANNÉE 2024-2025

CONTRÔLE CONTINU # 1

Durée 45min, aucun document autorisé.

Exercice 1 (Preuve alternative du lemme de Borel–Cantelli) *(5 points)*
Sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, soit $(A_n)_{n\geq 1}$ une suite d'événements.

1. *Montrer que l'on a l'égalité ensembliste*

$$\limsup_{n\to+\infty} A_n = \left\{ \sum_{n\geq 1} \mathbb{1}_{A_n} = +\infty \right\}.$$

2. *Du lemme de Fubini, déduire que si* $\sum_{n\geq 1} \mathbb{P}(A_n) < +\infty$, *alors* $\mathbb{P}(\limsup_{n\to+\infty} A_n) = 0$.

Exercice 2 (Maximum de variables de Cauchy) *(15 points)*
Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées de loi de Cauchy de paramètre 1, i.e. de densité commune

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\frac{1}{1+x^2}$$

par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$. On note $M_n := \max(X_1, \ldots, X_n)$ et $Z_n := M_n/n$.

1. *En considérant les ensembles $A_n := \{M_n \leq 0\}$, montrer que presque sûrement, on a $M_n > 0$ à partir d'un certain rang (aléatoire).*
2. *Expliciter la fonction de répartition F_{Z_n} de la variable Z_n.*
3. *Justifier rigoureusement que F_{Z_n} converge simplement lorsque n tend vers l'infini et expliciter sa limite, notée F.*
   Indice : on pourra utiliser sans démonstration la relation $\arctan(x) + \arctan(1/x) = \pi/2$ *pour $x > 0$ et l'équivalent* $\arctan(x) = x + o(x)$ *au voisinage de zéro.*
4. *Justifier que la fonction limite F est en fait la fonction de répartition F_Z d'une variable aléatoire strictement positive Z de densité f_Z que l'on explicitera.*
5. *Déterminer de deux façons disctintes la loi de la variable $1/Z$.*
6. *Question bonus : montrer de la même façon que la fonction de répartition de la variable $Y_n := \min(X_1, \ldots, X_n)/n$ converge lorsque n tend vers l'infini vers la fonction de répartition d'une variable à densité que l'on explicitera.*
7. *Question bonus : si les variables (X_n) sont maintenant des variables de Cauchy indépendantes de paramètre $\lambda > 0$, i.e. de densité*

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\frac{\lambda}{\lambda^2+x^2},$$

   que devient loi de la variable limite $1/Z$ de la question 5 ?