Contrôle continu # 1

Durée : 1h00, documents interdits.

Exercice 1 (Maximum d'exponentielles et loi de Gumbel)
On considère la fonction $F : \mathbb{R} \to [0,1]$ définie par

$$F(t) := e^{-e^{-t}}, \qquad t \in \mathbb{R}.$$

1. *Montrer qu'il existe une variable aléatoire réelle Z dont F est la fonction de répartition. Montrer que la variable Z possède une densité que l'on explicitera. La loi est Z est appelée loi de Gumbel.*
2. *Soit $(X_i)_{i\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes, toutes de loi exponentielle $\mathcal{E}(1)$, i.e. les variables X_i sont à valeurs dans $\mathbb{R}^+$ de densité commune $f_X(t) = e^{-t}\mathbb{1}_{t\geq 0}$. Expliciter la fonction de répartition commune F_X des variables X_i.*
3. *Déterminer la fonction de répartition F_{Z_n} de la variable*

$$Z_n := \max_{1\leq i\leq n} X_i - \log(n).$$

4. *Pour $t \in \mathbb{R}$, déterminer la limite de $F_{Z_n}(t)$ lorsque n tend vers l'infini.*

Exercice 2 (Méthode de Box–Müller)
Soient U et V deux variables aléatoires indépendantes de loi uniforme dans $[0,1]$.

1. *Expliciter la fonction de répartition de la variable positive $Z := -2\log(1-U)$ et en déduire que Z suit la loi exponentielle $\mathcal{E}(1/2)$, de densité $\frac{1}{2}e^{-t/2}\mathbb{1}_{t\geq 0}$.*
2. *Expliciter la fonction de répartition de la variable $R := \sqrt{Z}$, puis sa densité.*
3. *Expliciter la densité du couple $(R, 2\pi V)$*
4. *En utilisant un changement de variables adapté, déterminer la loi du couple (X,Y) où*

$$(X,Y) := (R\cos(2\pi V), R\sin(2\pi V)).$$

5. *Quelle est la loi de X ? de Y ? Les deux variables sont-elles indépendantes ?*

Exercice 3 (Bonus, traiter en priorité les questions précédentes)
On considère une suite de variables aléatoires indépendantes $(X_i)_{i\geq 1}$ de loi de Rademacher symétrique i.e. $\mathbb{P}(X_i = 1) = \mathbb{P}(X_i = -1) = 1/2$. On pose $S_n := \sum_{i=1}^n X_i$.

1. *Montre que $\mathbb{E}[S_n^4] = O(n^2)$ lorsque n tend vers l'infini.*
2. *Via une inégalité du cours, en déduire que pour tout $\varepsilon > 0$*

$$\sum_{n\geq 1} \mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{n}\right| \geq \varepsilon\right) < +\infty.$$

3. *Que pouvez-vous en conclure ?*