

## FEUILLE D'EXERCICES # 5

**Exercice 1** *Inversion de sommes et calcul d'intégrale*

1. Montrer que pour  $x \in \mathbb{R}$ , on a

$$\frac{\sin(x)}{x} = \int_0^1 \cos(xy) dy.$$

En déduire que  $x \mapsto \sin(x)/x$  est bornée sur  $\mathbb{R}$ .

2. À l'aide du théorème de Fubini, calculer l'intégrale suivante

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x} e^{-x} dx.$$

**Exercice 2** *Pourquoi faire simple...*

En étudiant sa dérivée, déterminer une expression plus simple de la fonction suivante :

$$t \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos x}{x} e^{-tx} dx.$$

**Exercice 3** *Inégalité de corrélation*

Sur un espace mesuré  $(\mathbb{R}, \mathcal{F}, \mu)$ , soient  $f$  et  $g$  deux fonctions intégrables et telles que  $fg$  est encore intégrable. On suppose de plus que  $f$  et  $g$  sont monotones et de même monotonie. Démontrer l'inégalité :

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)g(x)d\mu(x) \geq \int_{\mathbb{R}} f(x)d\mu(x) \int_{\mathbb{R}} g(x)d\mu(x).$$

**Exercice 4** *Intégration par parties*

Soit  $f$  et  $g$  deux fonctions Lebesgue intégrables. On définit  $\mu_f$  par  $\mu_f(A) = \int_A f(x)dx$  et  $\mu_g$  de même. On pose  $F(x) = \mu_f([-\infty, x])$ ,  $G(x) := \mu_g([-\infty, x])$  et

$$\Delta_1 := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x \leq y \leq b\} \text{ et } \Delta_2 := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq y \leq x \leq b\}.$$

En calculant de deux façons différentes la quantité  $\mu_f \otimes \mu_g (\Delta_1 \cup \Delta_2)$ , démontrer la formule d'intégration par parties :

$$F(b)G(b) - F(a)G(a) = \int_{[a,b]} F(x)g(x)d\lambda(x) + \int_{[a,b]} G(x)f(x)d\lambda(x)$$

**Exercice 5** *Transformée de Fourier*

Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  intégrable (i.e.  $|f|$  est intégrable sur  $\mathbb{R}$ ). On définit la transformée de Fourier de  $f$  par :

$$\mathcal{F}f(\xi) = \hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-ix\xi} dx.$$

1. Montrer que  $\mathcal{F} : L^1(\mathbb{R}) \rightarrow L^\infty(\mathbb{R})$  définit une application linéaire continue.
2. Pour  $a \in \mathbb{R}$ , notons  $\tau_a : f \mapsto f(\cdot - a)$ . Montrer que  $\mathcal{F}(\tau_a f)(\xi) = e^{-ia\xi} \mathcal{F}f(\xi)$ .
3. Montrer le lemme de Riemann-Lebesgue :  $\mathcal{F}f(\xi) \xrightarrow{|\xi| \rightarrow +\infty} 0$ . En déduire que  $\mathcal{F}f$  est uniformément continue sur  $\mathbb{R}$ .
4. Soient  $f, g \in L^1(\mathbb{R})$  et  $h = f * g$ . Montrer que  $\mathcal{F}h = (\mathcal{F}f)(\mathcal{F}g)$ .

**Exercice 6** *Transformée de Fourier encore*

On souhaite expliciter la transformée de Fourier suivante, pour  $t \in \mathbb{R}$

$$F(t) := \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} e^{-itx} dx.$$

1. Montrer que la fonction  $F$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et calculer sa dérivée.
2. En intégrant par parties l'expression obtenue, montrer que  $F$  vérifie l'équation différentielle linéaire suivante  $F'(t) = -tF(t)$ .
3. Expliciter la fonction  $F$ , que remarquez-vous?

**Exercice 7** *Non-intégrabilité et valeur principale et transformée de Hilbert*

Il se peut qu'une fonction  $f$  ne soit pas intégrable sur un intervalle  $]a, b[$  car elle possède une singularité non intégrable en  $x_0 \in ]a, b[$ . Par exemple la fonction  $x \mapsto 1/x^3$  sur  $[-1, 1]$  n'est clairement pas intégrable au voisinage zéro. Pour autant, il se peut que la limite suivante existe

$$L := \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left( \int_a^{x_0-\varepsilon} f(x) dx + \int_{x_0+\varepsilon}^b f(x) dx \right).$$

Si c'est le cas, on appelle  $L$  la valeur principale de l'intégrale et on note

$$L = \text{v.p.} \int_a^b f(x) dx.$$

**Attention, l'expression ci-dessus ne signifie pas que la fonction  $f$  est intégrable!!!**

La définition ci-dessus s'étend naturellement au cas où  $f$  possède un nombre fini de singularités  $\{x_1, \dots, x_n\}$  dans l'intervalle, si les intégrales  $\int_a^{x_1-\varepsilon} f(x) dx, \dots, \int_{x_n+\varepsilon}^b f(x) dx$  existent et sont finies et que la limite

$$L = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left( \int_a^{x_1-\varepsilon} f(x) dx + \dots + \int_{x_n+\varepsilon}^b f(x) dx \right)$$

existe, on pose de la même façon  $L = \text{v.p.} \int_a^b f(x) dx$ .

1. Calculer la valeur principale de  $x \mapsto 1/x^3$  sur  $[-1, 1]$ .
2. Calculer pour  $x \in \mathbb{R}$  la valeur principale v.p.  $\int_{-1}^1 \frac{dt}{x-t}$ .
3. Calculer la valeur principale v.p.  $\int_{-3}^3 \frac{dt}{t^2-4}$ .

Si  $f$  est une fonction de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ , on définit (si elle existe) sa transformée de Hilbert par l'expression

$$\mathcal{H}(f)(x) := \frac{1}{\pi} \text{v.p.} \int_{\mathbb{R}} \frac{f(t)}{x-t} dt.$$

4. Déterminer la transformée de Hilbert des fonctions  $\sin$ ,  $\cos$ ,  $t \mapsto 1/(1+t^2)$ .
5. Montrer que l'on a

$$\mathcal{H}(f)(x) = \frac{1}{\pi} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{f(x-t) - f(x+t)}{2t} dt.$$

6. Montrer que  $\mathcal{H}(\mathcal{H}(f))(x) = -f(x)$ .