

FEUILLE D'EXERCICES # 4

Exercice 1 Applications de théorèmes limites

À l'aide des théorèmes de convergence, déterminer les limites des suites de termes généraux :

$$\begin{aligned}
 (i) \quad & \sum_{k=1}^n \frac{n}{k^2 + nk + 1}, & (ii) \quad & \sum_{k=1}^n \frac{\sin k}{k^2} \left(\frac{k}{k+1}\right)^n, & (iii) \quad & \int_0^1 \frac{1 + nx^3}{(1+x^2)^n} dx, \\
 (iv) \quad & \int_0^n \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n e^{-2x} dx, & (v) \quad & \int_0^{+\infty} \frac{\sin(\pi x)}{1+x^n} dx, & (vi) \quad & n \int_0^1 \frac{e^{-nt}}{\sqrt{1+t}} dt.
 \end{aligned}$$

Exercice 2 Interspersion série intégrale

1. Soient $a, b \in \mathbb{R}_+^*$ et $f : x \in \mathbb{R}_+^* \rightarrow \frac{xe^{-ax}}{1-e^{-bx}}$. Montrer que f est intégrable sur \mathbb{R}_+^* et :

$$\int_0^{+\infty} f(x) dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(a+nb)^2}.$$

2. Montrer que la somme de la série $\sum_{n \geq 1} ne^{-nr}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$ et calculer son intégrale.

3. Soit μ une mesure sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ telle que $x \mapsto e^{x^2}$ soit μ -intégrable sur \mathbb{R} . Montrer que :

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad \int_{\mathbb{R}} e^{zx} d\mu(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!} \int_{\mathbb{R}} x^n d\mu(x).$$

Exercice 3 Problème d'interspersion

Soit $f :]0, 1[\rightarrow \mathbb{R}$ une fonction Lebesgue-intégrable, admettant une limite $f(1^-)$ à gauche en 1. L'objectif est de montrer l'équivalent suivant :

$$I_n = \int_0^1 x^n f(x) dx \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{f(1^-)}{n}.$$

1. Montrer que la suite (I_n) est bien de limite nulle.
2. Montrer le résultat pour $f \in \mathcal{C}^1([0, 1], \mathbb{R})$. En déduire que l'on ne peut pas appliquer le théorème de convergence dominée directement à nI_n .
3. Montrer l'équivalent souhaité.

Exercice 4 Fonction Gamma d'Euler

Pour tout $t > 0$, on pose :

$$\Gamma(t) = \int_0^{+\infty} x^{t-1} e^{-x} dx.$$

Montrer que Γ définit une fonction $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R})$ et montrer la formule d'Euler :

$$\forall t > 0, \Gamma(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^t n!}{t(t+1) \dots (t+n)}.$$

Exercice 5 *Mesure produit*

Montrer que $\mathcal{P}(\mathbb{N}) \otimes \mathcal{P}(\mathbb{N}) = \mathcal{P}(\mathbb{N}^2)$ et que $m \otimes m$ est la mesure de comptage sur \mathbb{N}^2 . Donner un exemple de mesure sur $(\mathbb{R}^2, \mathcal{B}(\mathbb{R}^2))$ qui n'est pas le produit de deux mesures sur \mathbb{R} .

Exercice 6 *Graphe et mesure*

Soit $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction mesurable. Notons $\Gamma = \{(x, f(x)), x \in \mathbb{R}^d\}$ le graphe de f . Montrer que Γ est mesurable et de mesure de Lebesgue nulle dans \mathbb{R}^{d+1} .

Exercice 7 *Question d'intégrabilité*

Étudier l'intégrabilité de f_α sur \mathbb{R}_+^2 selon α et calculer son intégrale lorsque c'est possible :

$$f_\alpha : (x, y) \mapsto \frac{1}{(1 + x + y)^\alpha}.$$

Exercice 8 *Calcul d'intégrale*

En étudiant la fonction $(x, y) \rightarrow x^y$ sur $[0, 1] \times [a, b]$, calculer l'intégrale suivante :

$$\int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\ln x} dx.$$

Exercice 9 *Intégrale de Gauss*

Calculer l'intégrale de Gauss ci-dessous en l'élevant au carré :

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} dx$$

Déterminer les valeurs de $\alpha \in \mathbb{R}$ pour lesquelles $f_\alpha : (x, y) \rightarrow \exp(-x^2 - \alpha xy - y^2)$ est intégrable sur \mathbb{R}^2 .

Exercice 10 *Volume de la boule unité*

Notons B_d la boule unité de \mathbb{R}^d pour la norme $\|-\|_2$. Calculer le volume de B_d en montrant la relation de récurrence

$$\forall d \geq 2, \lambda_d(B_d) = \frac{2\pi}{d} \lambda_{d-2}(B_{d-2}).$$

Exercice 11 *Changement de coordonnées*

Soient $U = [0, 1[\times]-\pi, \pi[$ et φ l'application définie par :

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^3 &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (u, v, w) &\rightarrow (u, uv \cos w, v \sin w). \end{aligned}$$

Montrer que φ définit un \mathcal{C}^1 -difféomorphisme de U sur son image et calculer $\lambda_3(\varphi(U))$.

Exercice 12 *Changement de variables*

Soient $U = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2, u > v > 0\}$ et $V = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2, v > u > 0\}$. Considérons ψ l'application définie par :

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (u, v) &\mapsto (u^2 + v^2, 2uv). \end{aligned}$$

Montrer que ψ définit un \mathcal{C}^1 -difféomorphisme de U (resp. V) sur son image que l'on déterminera. En déduire la valeur de l'intégrale suivante :

$$\int_{\mathbb{R}_+^2} |u^4 - v^4| e^{-(u+v)^2} du dv.$$