Feuille d'exercices # 3

Dans toute la suite, $(E, \mathcal{A}, \mu)$ désigne un espace mesuré.

Exercice 1 *Intégrales et intégrandes ordonnées*
Soient f et g deux fonctions intégrables sur $(E, \mathcal{A}, \mu)$ vérifiant :

$$\int_E f \, \mathrm{d}\mu > \int_E g \, \mathrm{d}\mu.$$

Montrer que $\{f > g\}$ est non vide. Donner un exemple dans lequel cet ensemble est réduit à un singleton.

Exercice 2 *Intégrabilité et comportement à l'infini*
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ mesurable telle que $f(x) \underset{r \to \infty}{\longrightarrow} a > 0$. Montrer que f n'est pas intégrable sur $\mathbb{R}$.

Exercice 3 *Formule de transfert*
Soient $(E, \mathcal{A})$ et $(F, \mathcal{B})$ deux espaces mesurables, $f : E \to F$ mesurable. Soit μ une mesure sur $(E, \mathcal{A})$. On note $\mu_f = \mu \circ f^{-1}$ la mesure image de μ par f sur $(F, \mathcal{B})$. Montrer qu'une fonction mesurable $g : F \to \mathbb{R}$ est μ_f-intégrable si et seulement si $g \circ f$ est μ-intégrable et que dans ce cas :

$$\int_E g \circ f \, \mathrm{d}\mu = \int_F g \, \mathrm{d}\mu_f.$$

Exercice 4 *Être borné dans L^1*
Soit $(f_n : E \to \mathbb{R})$ une suite de fonctions mesurables convergeant μ presque partout vers une fonction f mesurable. Montrer que f est intégrable sur E si :

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \int_E |f_n| \, \mathrm{d}\mu < +\infty.$$

Exercice 5 *Primitive*
Soit $f : (E, \mathcal{A}, \mu) \to \mathbb{R}$ intégrable sur E. Montrer la propriété d'uniforme continuité de l'intégrale :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall A \in \mathcal{A}, \mu(A) \leq \delta \Longrightarrow \int_A |f| \mathrm{d}\mu \leq \varepsilon.$$

En déduire que, sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$, la primitive suivante de f est uniformément continue :

$$F : x \in \mathbb{R}_+ \mapsto \int_{[0,x]} f \, \mathrm{d}\lambda.$$

Exercice 6 *Critère d'intégrabilité*
Soit $f : (E, \mathcal{A}, \mu) \to \mathbb{R}$ mesurable. Montrer que f est intégrable sur E si et seulement si :

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} 2^n \mu\left(\left\{2^n \leq |f| < 2^{n+1}\right\}\right) < +\infty.$$

A quelle condition sur $\alpha \in \mathbb{R}$ la fonction $f_\alpha : x \mapsto x^{-\alpha} \mathbf{1}_{x>1}$ est-elle Lebesgue-intégrable sur $\mathbb{R}$?

Exercice 7 *Critère d'intégrabilité, bis*
Supposons la mesure μ finie. Soit $f : E \to \mathbb{R}$ mesurable. Montrer que f est intégrable sur E si et seulement si :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \mu(\{|f| \geq n\}) < +\infty.$$

Que dire dans le cas où l'on se passe de l'hypothèse μ finie ?

Exercice 8 *Intégrabilité et sommabilité*
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ intégrable sur $\mathbb{R}$. Montrer que la série de fonctions $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |f(\cdot + n)|$ est presque partout convergente sur $[0, 1]$ (puis presque partout sur $\mathbb{R}$).

Exercice 9 *Échange de sommes*
Montrer que pour toute fonction $f : E \to \mathbb{R}_+$ mesurable :

$$\int_0^{+\infty} \mu(\{f > t\})\mathrm{d}t = \int_E f \ \mathrm{d}\mu.$$

Montrer que plus généralement pour tout $p \in]0, +\infty[$:

$$\int_E f^p \ \mathrm{d}\mu = p \int_0^{+\infty} \mu(\{f > t\})t^{p-1} \ \mathrm{d}t.$$

Exercice 10 *Intégrabilité et dimension*
Soit $\| \cdot \|$ une norme sur $\left(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}\left(\mathbb{R}^d\right)\right)$ telle que la boule unite B_d soit de mesure de Lebesgue finie. Donner une condition sur d et p pour que la fonction $x \mapsto \|x\|^{-p}$ soit Lebesgue-intégrable sur B_d.

Exercice 11 *Lemme de Scheffé*
Soit (f_n) une suite de fonctions positives et intégrables sur E, convergeant presque partout vers f intégrable sur E et vérifiant :

$$\int_E f_n \ \mathrm{d}\mu \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \int_E f \ \mathrm{d}\mu.$$

Montrer que la suite (f_n) converge vers f dans $L^1(E)$. Le résultat est-il encore vrai si l'on ne suppose plus les fonctions positives ?

Exercice 12 *Accroissements*
Soit $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ croissante, continue en 0 et 1, dérivable λ-presque partout. Montrer que :

$$\int_0^1 f'(x)\mathrm{d}x \leq f(1) - f(0).$$

Donner un exemple de fonction pour laquelle cette inégalité est stricte.

Exercice 13 *Exemple d'interversion*
Déterminer la limite de la suite $I_n(\alpha)$ ci-dessous selon $\alpha \in \mathbb{R}$:

$$I_n(\alpha) = \int_0^n \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n e^{\alpha x} \ \mathrm{d}x.$$

Exercice 14 *Interversion et monotonie*
Exercice 18. Soit (f_n) une suite décroissante de fonctions mesurables positives qui converge μ-presque partout vers une fonction f. On suppose qu'il existe n_0 tel que f_{n_0} soit intégrable sur E. Montrer que :

$$\lim_{n\to\infty} \int_E f_n \mathrm{d}\mu = \int_E f \ \mathrm{d}\mu.$$

Que peut-on dire sans l'hypothèse d'intégrabilité ?