Feuille d'exercices # 1

Exercice 1 (Manipulation et identification d'ensembles)
Déterminer les ensembles suivants :

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*}\left[0,1-\frac{1}{n}\right],\ \bigcap_{n\in\mathbb{N}^*}\left[0,\frac{1}{n}\right[,\ \bigcup_{n\in\mathbb{N}^*}\left[\frac{1}{n},1+\frac{1}{n}\right],\ \bigcup_{k\in\mathbb{N}^*}\bigcap_{n\in\mathbb{N}^*}\left[k-\frac{1}{n},k+\frac{1}{n}\right].$$

Soient f et $(f_n)_{n\in\mathrm{N}}$ des applications d'un ensemble E dans $\mathbb{R}$. Interpréter l'ensemble suivant :

$$\bigcap_{n\in N^*}\bigcup_{k\in N^*}\bigcap_{i\geq k}\left\{x\in E, |f_i(x)-f(x)|\leq\frac{1}{n}\right\}.$$

Donner un exemple de suite d'ensembles (A_n) de fermés non vides de $\mathbb{R}$, décroissante pour l'inclusion dont l'intersection est vide.

Exercice 2 (Images directe et réciproque, complémentaire)
Soient E et F deux ensembles, $f:E\to F$ une application.

1. *Montrer que pour tout $B\subset E$, on a l'égalité $f^{-1}\left(B^c\right)=f^{-1}(B)^c$. Donner des conditions nécessaires et suffisantes sur f pour que pour tout $A\subset E$:*
   (a) $f\left(A^c\right)\subset f(A)^c$,
   (b) $f(A)^c\subset f\left(A^c\right)$.

   Donner un exemple d'application f et d'ensemble A ne satisfaisant aucune des inclusions précédentes.
2. *Soient $(A_i)_{i\in I}$ et $(B_i)_{i\in I}$ des familles de parties de E et F respectivement. Montrer que :*

$$f^{-1}\left(\bigcup_{i\in I}B_i\right)=\bigcup_{i\in I}f^{-1}\left(B_i\right),\quad f^{-1}\left(\bigcap_{i\in I}B_i\right)=\bigcap_{i\in I}f^{-1}\left(B_i\right),$$
$$f\left(\bigcup_{i\in l}A_i\right)=\bigcup_{i\in I}f\left(A_i\right),\quad f\left(\bigcap_{i\in l}A_i\right)\subset\bigcap_{i\in I}f\left(A_i\right).$$

   Montrer que la demière inclusion est une égalité si f est injective.

Exercice 3 (Fonction additive d'ensembles)
Soient E un ensemble et $f:\mathcal{P}(E)\to\mathbb{R}_+$une application vérifiant $f(A\cup B)=f(A)+f(B)$ dès que $A\cap B=\emptyset$. Pour toutes parties A et B, montrer que $f(A\cup B)=f(A)+f(B)-f(A\cap B)$. Soit (A_n) une suite croissante de parties de E. Montrer que la suite $\left(f\left(A_n\right)\right)$ est convergente.

Exercice 4 (Fonctions indicatrices)
Soient E un ensemble, A et B deux parties de E. Indiquer si les fonctions suivantes sont des fonctions indicatrices (et préciser les ensembles associés si possible) :

$$\mathbb{1}_A+\mathbb{1}_B,\quad \mathbb{1}_A-\mathbb{1}_B,\quad \sup\left\{\mathbb{1}_A,\mathbb{1}_B\right\},\quad \inf\left\{\mathbb{1}_A,\mathbb{1}_B\right\},\quad \mathbb{1}_A\mathbb{1}_B,\quad \mathbb{1}_A+\mathbb{1}_B-\mathbb{1}_A\mathbb{1}_B,\quad \left|\mathbb{1}_A-\mathbb{1}_B\right|.$$

Exercice 5 (Identification de tribus)
Pour E un ensemble, donner des conditions pour que les classes suivantes soient des tribus :

$$\{\emptyset, E\}, \quad \mathcal{P}(E), \quad \{\emptyset, \{x\}, E\}, \quad \{\emptyset, \{x\}, \{x\}^c, E\} \text{ pour } x \in E,$$

les parties finies de E, les parties finies ou cofinies de E, les parties dénombrables de E, les parties dénombrables ou codénombrables de E.

Exercice 6 (Tribus image et réciproque)
Soient E, F deux ensembles et $f : E \to F$ une application. Soient $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ tribus sur E et F respectivement.

1. *Montrer que $f^{-1}(\mathcal{B}) = \left\{f^{-1}(B), B \in \mathcal{B}\right\}$ est une tribu sur E.*
2. *Justifier que $f(A)$ n'est en général pas une tribu sur F.*
3. *Montrer que $\left\{B, f^{-1}(B) \in A\right\}$ est une tribu sur F.*

Exercice 7 (Contre-exemples)

1. *Expliciter une union finie de tribu qui n'est pas une tribu.*
2. *Justifier que $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \sigma\{\{0\}, \{1\}, \ldots, \{n\}\}$ n'est pas une tribu sur $\mathbb{N}$.*

Exercice 8 (Identification de tribus, bis)
Soit E un ensemble.

1. *Déterminer la tribu engendrée par les singletons $\mathcal{S} = \sigma(\{\{x\}, x \in E\})$.*
2. *Déterminer la tribu engendrée par les parties finies de E.*
3. *Supposons que E ait au moins deux éléments. Déterminer la tribu engendrée par les paires de E, i.e. $\mathcal{D} = \sigma\left(\left\{\{x, y\}, (x, y) \in E^2, x \neq y\right\}\right)$.*
4. *Déterminer (et donner le cardinal) de la tribu engendrée par une partition finie de E.*

Exercice 9 (Définition équivalente)
Soient $(E, \mathcal{A})$ un espace mesurable et $\mu : \mathcal{A} \to \overline{\mathbb{R}}_+$ une application vérifiant :

1. *$\mu(\emptyset) = 0$,*
2. *si $A, B \in A$ tels que $A \cap B = \emptyset$, alors $\mu(A \sqcup B) = \mu(A) + \mu(B)$.*
3. *pour toute suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N},}$ croissante pour I'inclusion, $\lim_{n\to\infty} \mu(A_n) = \mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right)$.*

Montrer que μ est une mesure sur $(E, \mathcal{A})$.

Exercice 10 (Mesure image)
Soient $(E, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré, $(F, \mathcal{B})$ un espace mesurable et $f : (E, \mathcal{A}, \mu) \to (F, \mathcal{B}, \mu)$ une fonction mesurable. Montrer que l'application

$$\begin{aligned} \mu_f : \mathcal{B} &\longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_+ \\ B &\longmapsto \mu\left(f^{-1}(B)\right) \end{aligned}$$

définit une mesure sur $(F, \mathcal{B})$, appelée mesure image de μ par f.