UNIVERSITÉ DE RENNES — L3 MATHÉMATIQUES
INTÉGRATION DE LEBESGUE — ANNÉE 2023-2024

CONTRÔLE CONTINU # 2

le 21 novembre 2023 ; durée 45 minutes ; aucun document autorisé

Exercice 1 *Question de cours ou presque : convergences*
Soit $(E, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré et (f_n) une suite de fonctions mesurables qui converge presque partout vers une fonction f. On suppose que les fonctions f_n et f sont intégrables.

1. On suppose que $\lim_{n\to\infty} \int_E |f_n - f| d\mu = 0$. Montrer que $\lim_{n\to\infty} \int_E f_n d\mu = \int_E f d\mu$ et $\lim_{n\to\infty} \int_E |f_n| d\mu = \int_E |f| d\mu$.
2. Montrer que si $\lim_{n\to\infty} \int_E f_n d\mu = \int_E f d\mu$, on n'a pas forcément $\lim_{n\to\infty} \int_E |f_n - f| d\mu = 0$.

Exercice 2 *Application de la convergence dominée*
Pour $x \geq 0$ et $n \geq 1$ on pose $f_n(x) = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$.

1. Démontrer que, pour tout $x \geq 0$, $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = e^x$ et que $|f_n(x)| \leq e^x$.
2. Soit $\beta > 1$, montrer que la suite $\int_0^\infty f_n(x) e^{-\beta x} dx$ converge lorsque n tend vers l'infini et expliciter sa limite.

Exercice 3 *Inversion de sommes et calcul d'intégrale*

1. Montrer que pour $x \in \mathbb{R}$, on a
$$\frac{\sin(x)}{x} = \int_0^1 \cos(xy) dy.$$
En déduire que $x \mapsto \sin(x)/x$ est bornée sur $\mathbb{R}$.
2. À l'aide du théorème Fubini, calculer l'intégrale suivante
$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x} e^{-x} dx.$$