Contrôle continu # 1

le 10 octobre 2023 ; durée 45 minutes ; aucun document autorisé

Exercice 1 *Question de cours ou presque : mesure et monotonie*
Soient un espace mesurable $(E, \mathcal{A})$ et $\mu : \mathcal{A} \to [0, +\infty[$ une application additive, autrement dit vérifiant $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$ lorsque $A, B \in \mathcal{A}$ et $A \cap B = \emptyset$, et telle que $\mu(E) < +\infty$.

1. Montrer que l'on a automatiquement $\mu(\emptyset) = 0$.
2. Montrer que les quatre affirmations suivantes sont équivalentes :
   (a) μ est une mesure $\sigma-$additive.
   (b) μ est continue sur les suites croissantes :
   si $(A_n)_{n\geq 0} \in \mathcal{A}^{\mathbb{N}}$, avec $A_n \subset A_{n+1}$ pour tout $n \geq 0$, alors $\mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \lim_{n\to+\infty} \mu(A_n)$.
   (c) μ est continue sur les suites décroissantes :
   si $(A_n)_{n\geq 0} \in \mathcal{A}^{\mathbb{N}}$, avec $A_n \supset A_{n+1}$ pour tout $n \geq 0$, alors $\mu\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \lim_{n\to+\infty} \mu(A_n)$.
   (d) μ est continue sur des suites décroissantes vers $\emptyset$:
   si $(A_n)_{n\geq 0} \in \mathcal{A}^{\mathbb{N}}$, avec $A_n \supset A_{n+1}$ pour tout $n \geq 0$, $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n = \emptyset$, alors $\lim_{n\to+\infty} \mu(A_n) = 0$.

Exercice 2 *Tribu des certains et négligeables*
Soit $(E, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré avec μ une mesure de probabilité. On introduit la famille de parties $\mathcal{F} = \{A \in \mathcal{A} : \mu(A) = 0 \text{ ou } \mu(A) = 1\}$. Montrer que $\mathcal{F}$ est une tribu sur E.

Exercice 3 *Dérivée mesurable*
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$. On munit $\mathbb{R}$ de sa tribu borélienne $\mathcal{B}(\mathbb{R})$. Montrer que la dérivée f' est une fonction mesurable. On pourra voir f' comme une limite simple d'une suite de fonctions mesurables.