Feuille d'exercices # 4

Exercice 1 *LGN et TLC*
On jette n fois un dé et on note X_i le résultat du $i-$ème lancer. On pose $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$.

a) Calculer la moyenne et la variance de X_1.

b) Quelle est la limite de S_n/n lorsque n tend vers l'infini ?

c) Quelle est la loi limite de $\frac{S_n}{\sqrt{n}} - \frac{7}{2}\sqrt{n}$ lorsque n tend vers l'infini ?

Exercice 2 *Approximation normale*
On jette un dé 180 fois. On note X la variable aléatoire : "nombre de sorties du 4".

1. Quelle est la loi de X ?
2. Estimer la probabilité pour que X soit compris entre 29 et 32.

Exercice 3 *Approximation poissonnienne*
Suite à une vaccination contre le paludisme, dans une population à risque et compte tenu du délai d'immunisation, on estime à 2% la proportion de personnes qui seront pourtant atteintes de la maladie. On souhaite estimer la probabilité de constater, lors d'un contrôle dans un petit village de 100 habitants tous récemment vaccinés, au moins deux personnes malades ? (on supposera l'indépendance des éventualités).

1. Quelle est la loi du nombre de malade ? En déduire la probabilité recherchée.
2. Retrouver le résultat en utilisant une approximation poissonnienne de la loi binomiale.

Exercice 4 *Automate*
Quotidiennement, 150 personnes retirent de l'argent à un guichet automatique donné. La somme moyenne demandée par chaque personne est de 30 euros, avec un écart type de 10 euros. Les sommes demandées sont supposées indépendantes et de même loi. Combien d'argent doit contenir l'automate en début de journée pour que, avec une probabilité supérieure à 0.95, les 150 personnes puissent retirer la somme qu'elles souhaitent ?

Exercice 5 *Surbooking*
Une compagnie aérienne exploitant un avion de 300 places décide de faire de la surréservation (surbooking) en prenant pour chaque vol un nombre $n > 300$ de réservations. S'il se présente plus de 300 passagers à l'embarquement, les 300 premiers arrivés prennent leur vol et les autres sont dédommagés financièrement.

1. On considère que les désistements des passagers sont mutuellement indépendants et que la probabilité de désistement de chacun d'eux est 10%. On note n le nombre de réservations prises par la compagnie pour un vol donné et S_n le nombre (aléatoire) de passagers se présentant à l'embarquement pour ce vol. Donner la loi de S_n, sa moyenne et sa variance.
2. Le directeur commercial de la compagnie aimerait connaître la valeur maximale de n telle que $\mathbb{P}(S_n \leq 300) \geq 0,99$. En utilisant le théorème limite central, proposez une solution approchée de ce problème.

Exercice 6 *Élections*
Lors d'éléctions présidentielles en France, un candidat A a obtenu 20% des voix. On prend au hasard dans des bureaux de vote de grandes villes un échantillon de 200 bulletins : on note X la variable aléatoire correspondant au nombre de voix pour A sur cet échantillon.

1. Quelle est la loi de la variable X ?
2. Comment peut-on l'approcher ?
3. Quelle est alors la probabilité pour que : X soit supérieur à 45 ? X compris entre 30 et 50 ?
4. Pour un autre candidat B moins heureux le pourcentage des voix est de 2%. En notant Y le nombre de voix pour B dans l'échantillon, sur 100 bulletins, reprendre les questions 1 et 2. Quelle est alors la probabilité pour que : Y soit supérieur à 5 ? Y compris entre 1 et 4 ?

Exercice 7 *Tout compris*
Un fournisseur d'accès à Internet met en place un point local d'accès, qui dessert 5000 abonnés. À un instant donné, chaque abonné a une probabilité égale à 20% d'être connecté. Les comportements des abonnés sont supposés indépendants les uns des autres.

1. On note X la variable aléatoire égale au nombre d'abonnés connectés à un instant t. Quelle est la loi de X ? Quelle est son espérance, son écart-type ?
2. On pose $Y = (X - 1000)/\sqrt{800}$. Justifier précisément qu'on peut approcher la loi de Y par la loi normale $\mathcal{N}(0, 1)$.
3. Le fournisseur d'accès souhaite savoir combien de connexions simultanées le point d'accès doit pouvoir gérer pour que sa probabilité d'être saturé à un instant donné soit inférieure à $2,5\%$. En utilisant l'approximation précédente, proposer une valeur approchée de ce nombre de connexions.