Université de Rennes 1 — L1 SVE

Probabilités et statistiques — année 2015-2016

Éléments de correction de la feuille d'exercices # 3

Exercice 1 *Exemple de loi discrète*

Soit X une variable aléatoire discrète prenant les valeurs 2, 4, 6, ou 8. Déterminer la loi de X sachant que :

$$\mathbb{P}(X < 6) = \frac{1}{3}, \quad \mathbb{P}(X > 6) = \frac{1}{2}, \quad \mathbb{P}(X = 2) = \mathbb{P}(X = 4).$$

On a

$$\frac{1}{3} = \mathbb{P}(X < 6) = \mathbb{P}(X = 2 \text{ ou } X = 4) = \mathbb{P}(X = 2) + \mathbb{P}(X = 4)$$

et comme $\mathbb{P}(X = 2) = \mathbb{P}(X = 4)$, on a déduit que

$$\mathbb{P}(X = 2) = \mathbb{P}(X = 4) = \frac{1}{6}.$$

Par ailleurs, on a

$$\frac{1}{2} = \mathbb{P}(X > 6) = \mathbb{P}(X = 8).$$

Enfin, on a

$$\mathbb{P}(X = 6) = 1 - \mathbb{P}(X \neq 6) = 1 - (\mathbb{P}(X > 6) + \mathbb{P}(X < 6)) = \frac{1}{6}.$$

On vérifie alors naturellement que

$$\mathbb{P}(X = 2) + \mathbb{P}(X = 4) + \mathbb{P}(X = 6) + \mathbb{P}(X = 8) = 1.$$

Exercice 2 *Motus*

Une urne contient des boules numérotées : 7 boules sont marquées du chiffre 1, 5 boules sont marquées du chiffre 3 et 3 boules sont marquées du chiffre 5. On tire au hasard une boule de l'urne et on note X sa marque.

1. Déterminer la loi de la variable X.
   La loi de X est donnée par
   $$\mathbb{P}(X = 1) = \frac{7}{15}, \quad \mathbb{P}(X = 3) = \frac{5}{15}, \quad \mathbb{P}(X = 5) = \frac{3}{15}.$$

2. Calculer l'espérance et la variance de X.
   On a alors
   $$\begin{aligned} \mathbb{E}[X] \quad &= 1 \times \frac{7}{15} + 3 \times \frac{5}{15} + 5 \times \frac{3}{15} = \frac{37}{15} \\ \mathbb{E}[X^2] \quad &= 1^2 \times \frac{7}{15} + 3^2 \times \frac{5}{15} + 5^2 \times \frac{3}{15} = \frac{127}{15} \end{aligned}$$
   dont on déduit $\mathrm{var}(X) = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2 \approx 2,4$.

Exercice 3 *Dé truqué*

Une variable aléatoire X prend les valeurs entières $k \in \{1,2,3,4,5,6\}$, avec probabilité proportionnelle à k i.e. il existe une réel $\alpha > 0$, tel que $\mathbb{P}(X = k) = \alpha k$.

1. Préciser la loi de X. Calculer son espérance.

   La loi de X est une probabilité, on doit donc avoir

   $$1 = \mathbb{P}(X = 1) + \mathbb{P}(X = 2) + \ldots + \mathbb{P}(X = 6) = \alpha + 2\alpha + \ldots + 6\alpha = 21\alpha,$$

   autrement dit, on a $\alpha = 1/21$. Dès lors, l'espérance de X est donnée par

   $$\mathbb{E}[X] = 1 \times \frac{1}{21} + 2 \times \frac{2}{21} + \ldots + 6 \times \frac{6}{21} = \frac{13}{3}.$$

2. On pose $Y = 1/X$. Déterminer la loi de Y.

   La variable Y est à valeurs dans l'ensemble $\{1/6, 1/5, \ldots, 1\}$ et l'on a naturellement

   $$\mathbb{P}(Y = 1/k) = \mathbb{P}(X = k) = \frac{k}{21}.$$

Exercice 4 *Nombre de piles*

On lance trois pièces équilibrées. On désigne par X le nombre de piles obtenus.

1. Déterminer la loi de X.

   D'après le cours, la loi de X est la loi binomiale $B(3, 1/2)$.

2. Calculer la moyenne et la variance de X.

   Toujours d'après le cours, on a alors

   $$\mathbb{E}[X] = 3 \times \frac{1}{2} = \frac{3}{2}, \qquad \mathrm{var}(X) = 3 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{3}{4}.$$

Exercice 5 *Tu joues ou bien ?*

On vous propose le jeu suivant. Pour pouvoir jouer, il faut d'abord verser 1 euro. On jette deux dés simultanément. Si l'un des dés au moins présente un chiffre impair, on ne gagne rien. Si les dés présentent deux chiffres pairs différents, on gagne 1 euro. Enfin, si les dés présentent deux fois le même chiffre pair, on gagne une somme égale à la somme de ces deux chiffres, par exemple on gagne 8 si on fait un double quatre. Joueriez-vous à ce jeu ?

Les valeurs possibles pour le gain sont $\{-1, 0, 3, 7, 11\}$ et l'on a

$$\mathbb{P}(X = -1) = \mathbb{P}(\text{au moins un dé impair}) = 1 - \mathbb{P}(\text{deux dés pairs}) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}.$$

$$\mathbb{P}(X = 0) = \mathbb{P}(\{(2,4),(4,2),(2,6),(6,2),(4,6),(6,4)\}) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

$$\mathbb{P}(X = 3) = \mathbb{P}(\{(2,2)\}) = \frac{1}{36}, \quad \mathbb{P}(X = 7) = \mathbb{P}(\{(4,4)\}) = \frac{1}{36} \quad \mathbb{P}(X = 11) = \mathbb{P}(\{(6,6)\}) = \frac{1}{36}.$$

On a alors

$$\mathbb{E}[X] = -1 \times \frac{3}{4} + 0 \times \frac{1}{6} + 3 \times \frac{1}{36} + 7 \times \frac{1}{36} + 11 \times \frac{1}{36} = -\frac{1}{6} < 0.$$

En moyenne, le joueur est donc perdant !

Exercice 6 *Génotype*
Considérons deux parents hétérozygotes de génotype Aa tels que leur enfants peuvent avoir les génotypes AA, Aa ou aa avec probabilité

$$\mathbb{P}(AA) = \frac{1}{4}, \quad \mathbb{P}(Aa) = \frac{1}{2}, \quad \mathbb{P}(aa) = \frac{1}{4}.$$

Supposons qu'ils aient 3 enfants.
Dans toute la suite, on **suppose** que les génotypes des trois enfants sont indépendants et on les note X, Y et Z.

1. Quelle est la probabilité qu'exactement l'un d'eux ait le génotype aa ?
   L'évèment A = "exactement un des enfants a le génotype aa" s'écrit comme l'union disjointe des trois évènements suivant :

$$\begin{aligned} A = \quad & (X = aa \ \cap \ Y \neq aa \ \cap\cap Z \neq aa) \sqcup (X \neq aa \ \cap \ Y = aa \ \cap \ Z \neq aa) \\ & \sqcup (X \neq aa \ \cap Y \neq aa \ \cap Z = aa) \end{aligned}$$

   La probabilité recherchée est donc

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(A) = \quad & \mathbb{P}\left(X = aa \ \cap Y \neq aa \ \cap Z \neq aa\right) + \mathbb{P}\left(X \neq aa \ \cap Y = aa \ \cap Z \neq aa\right) \\ & \mathbb{P}\left(X \neq aa \ \cap Y \neq aa \ \cap Z = aa\right) \\ \overset{\perp}{=} \quad & \mathbb{P}(X = aa)\mathbb{P}(Y \neq aa)\mathbb{P}(Z \neq aa) + \mathbb{P}(X \neq aa)\mathbb{P}(Y = aa)\mathbb{P}(Z \neq aa) \\ & \mathbb{P}(X \neq aa)\mathbb{P}(Y \neq aa)\mathbb{P}(Z = aa) \\ = \quad & \frac{1}{4} \times \frac{3}{4} \times \frac{3}{4} + \frac{3}{4} \times \frac{1}{4} \times \frac{3}{4} + \frac{3}{4} \times \frac{3}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{9}{64}. \end{aligned}$$

2. Quelle est la probabilité qu'au moins l'un deux ait le génotype aa ?
   Si on note B l'évènement "au moins l'un des enfants a le génotype aa", on a alors

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(B) \quad & = 1 - \mathbb{P}(X \neq aa \ \cap \ Y \neq aa \ \cap \ Z \neq aa) \overset{\perp}{=} 1 - \mathbb{P}(X \neq aa)\mathbb{P}(Y \neq aa)\mathbb{P}(Z \neq aa) \\ & = 1 - \frac{3}{4} \times \frac{3}{4} \times \frac{3}{4} = \frac{37}{64}. \end{aligned}$$

Exercice 7 *Génotype, suite*
Considérons les enfants de parents hétérozygotes de génotype Aa. La distribution des enfants est celle de l'exercice précédent. On choisit de façon aléatoire 240 de ces enfants. On définit N_1, N_2, N_3 le nombre d'enfants de génotype AA, Aa et aa respectivement.

1. Quelle est la loi de N_1 ? N_2 ? N_3 ?
   Ce sont des lois binomiales de paramètres $n = 240$ et $p_1 = 1/4$, $p_2 = 1/2$, et $p_3 = 1/4$ respectivement.
2. Quel est le lien entre ces différentes variables ? Vérifier que pour $k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{N}$,

$$\mathbb{P}(N_1 = k_1, N_2 = k_2, N_3 = k_3) \neq \mathbb{P}(N_1 = k_1)\mathbb{P}(N_2 = k_2)\mathbb{P}(N_3 = k_3).$$

   La somme de ces variables vaut 240, elles ne sont donc pas indépendantes !

Exercice 8 *Moments des lois usuelles*
Déterminer les espérances et les variances des lois usuelles (Cf. pages 27 et 37 du polycopié).

Exercice 9 *Somme de variables de Bernoulli*
Soient $X_1, \ldots, X_n$ des variables indépendantes de de loi de Bernoulli $\mathcal{B}(p)$.

1. Déterminer la loi de $X_1 + X_2$. En déduire la loi de $X_1 + \ldots + X_n$.
   La variable $S = X_1 + X_2$ est à valeurs dans $\{0, 1, 2\}$ et on a
   $$\begin{aligned} \mathbb{P}(S=0) &= \mathbb{P}(X_1=0,\ X_2=0) = \mathbb{P}(X_1=0)\mathbb{P}(X_2=0) = (1-p)^2, \\ \mathbb{P}(S=2) &= \mathbb{P}(X_1=1,\ X_2=1) = \mathbb{P}(X_1=1)\mathbb{P}(X_2=1) = p^2, \\ \mathbb{P}(S=1) &= 1 - (\mathbb{P}(S=0) + \mathbb{P}(S=2)) = 2p(1-p). \end{aligned}$$
   On reconnaît la loi binomiale $B(2,p)$. Plus généralement, la loi de $X_1 + \ldots + X_n$ est la loi binomiale $B(n,p)$.
2. Interpréter ce résultat en terme de jeu de pile ou face.
   La loi binomiale $B(n,p)$ est la loi du nombre de succés lorsque l'on joue n fois de suite avec une pièce biaisée telle que $\mathbb{P}(\text{pile}) = p$.

Exercice 10 *Somme de variables de Poisson*
Soient $X_1, \ldots, X_n$ des variables indépendantes de, où X_j suit une loi de Poisson paramètre λ_j.

1. Déterminer la loi de $X_1 + X_2$. En déduire la loi de $X_1 + \ldots + X_n$.
   Pour un entier positif k donné, on a
   $$\begin{aligned} \mathbb{P}(X_1+X_2=k) &= \sum_{\ell=0}^{k} \mathbb{P}(X_1+X_2=k,\ X_2=\ell) = \sum_{\ell=0}^{k} \mathbb{P}(X_1=k-\ell,\ X_2=\ell) \\ &= \sum_{\ell=0}^{k} \mathbb{P}(X_1=k-\ell)\mathbb{P}(X_2=\ell) = \sum_{\ell=0}^{k} e^{-\lambda_1}\frac{\lambda_1^{k-\ell}}{(k-\ell)!}e^{-\lambda_2}\frac{\lambda_2^{\ell}}{\ell!} \\ &= \frac{e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}}{k!}\sum_{\ell=0}^{k}\frac{k!}{(k-\ell)!\ell!}\lambda_1^{k-\ell}\lambda_2^{\ell} \\ &= \frac{e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}}{k!}(\lambda_1+\lambda_2)^k \end{aligned}$$
   d'après la forumle du binôme. On reconnaît ainsi une loi de Poisson de paramètre $\lambda_1 + \lambda_2$. Plus généralement, la loi de$X_1 + \ldots + X_n$ est la loi de Poisson de paramètre $\lambda_1 + \ldots + \lambda_n$.
2. Expliciter la loi de X_j sachant $X_1 + \ldots + X_n = k$.
   Si $k \geq l$ sont deux entiers, on a
   $$\mathbb{P}(X_j = l \mid X_1 + ... + X_n = k) = \frac{\mathbb{P}(X_j = l \text{ et } X_1 + ... + X_n = k)}{\mathbb{P}(X_1 + ... + X_n = k)}$$
   $$\mathbb{P}(X_j = l | X_1 + ... + X_n = k) = \frac{\mathbb{P}(X_j = l \text{ et } X_1 + X_2 + ... + X_{j-1} + X_{j+1} + ... + X_n = k - l)}{\mathbb{P}(X_1 + ... + X_n = k)}$$

Par indépendance

$$\mathbb{P}(X_j = l | X_1 + ... + X_n = k) = \frac{\mathbb{P}(X_j = l) \times \mathbb{P}(X_1 + X_2 + ... + X_{j-1} + X_{j+1} + ... + X_n = k - l)}{\mathbb{P}(X_1 + ... + X_n = k)}$$

$$\mathbb{P}(X_j = l \mid X_1 + ... + X_n = k) = \frac{e^{-\lambda_j}(\lambda_j^l/l!) \times e^{-\sum_{i\neq j}\lambda_i}((\sum_{i\neq j}\lambda_i)^{k-l}/(k-l)!}{e^{-\sum_{i=1}^n \lambda_i}((\sum_{i=1}^n \lambda_i)^k/k!}$$

Les exponentielles se simplifient, et si l'on pose

$$p = \frac{\lambda_j}{\sum_{i=1}^n \lambda_i}, \quad \text{on obtient} \quad \mathbb{P}(X_j = l \mid X_1 + ... + X_n = k) = C_k^l p^l (1-p)^{k-l}.$$

La loi de X_j sachant $\{X_1 + ... + X_n = k\}$ est une loi binomiale $\mathcal{B}(k, p)$.

Exercice 11 *Passe-partout*

Un trousseau de n clefs contient une seule clef ouvrant une serrure donnée. On les essaie l'une après l'autre au hasard. Calculer la loi, l'espérance et la variance du nombre d'essais nécessaires. Même question si, un peu éméché, on réessaie à chaque fois une clef au hasard sans avoir écarté la précédente.

On note X le nombre d'essais nécessaires pour trouver la bonne clef. Si on élimine les mauvaises clefs au fur et à mesure, on a naturellement $\mathbb{P}(X = 1) = \frac{1}{n}$. Ensuite on peut écrire

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X = 2) &= \mathbb{P}(X = 2 \cap X > 1) = \mathbb{P}(X = 2 \mid X > 1)\mathbb{P}(X > 1) \\ &= \mathbb{P}(X = 2 \mid X > 1)\,(1 - \mathbb{P}(X = 1)) = \frac{1}{n-1} \times \left(1 - \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n}. \end{aligned}$$

De même, on a

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X = 3) &= \mathbb{P}(X = 3 \cap X > 2) = \mathbb{P}(X = 3 \mid X > 2)\mathbb{P}(X > 2) \\ &= \mathbb{P}(X = 3 \mid X > 2)\,(1 - \mathbb{P}(X \leq 2)) \\ &= \mathbb{P}(X = 3 \mid X > 2)\,(1 - \mathbb{P}(X = 2) - \mathbb{P}(X = 1)) \\ &= \frac{1}{n-2} \times \left(1 - \frac{2}{n}\right) = \frac{1}{n}. \end{aligned}$$

et on montre de façon similaire que $\mathbb{P}(X = k) = 1/n$ pour tout $1 \leq k \leq n$. Autrement dit, la loi de X est la loi uniforme sur $\{1, \dots, n\}$. Maintenant, si on n'élimine pas les mauvaises clefs au fur et à mesure, on a encore $\mathbb{P}(X = 1) = \frac{1}{n}$ et en raisonnant comme plus haut

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X = 2) &= \mathbb{P}(X = 2 \cap X > 1) = \mathbb{P}(X = 2 \mid X > 1)\mathbb{P}(X > 1) \\ &= \mathbb{P}(X = 2 \mid X > 1)\,(1 - \mathbb{P}(X = 1)) = \frac{1}{n} \times \left(1 - \frac{1}{n}\right). \end{aligned}$$

De même

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X = 3) &= \mathbb{P}(X = 3 \cap X > 2) = \mathbb{P}(X = 3 \mid X > 2)\mathbb{P}(X > 2) \\ &= \mathbb{P}(X = 3 \mid X > 2)\,(1 - \mathbb{P}(X \leq 2)) \\ &= \mathbb{P}(X = 3 \mid X > 2)\,(1 - \mathbb{P}(X = 2) - \mathbb{P}(X = 1)) \\ &= \frac{1}{n} \times \left(1 - \frac{1}{n} - \frac{1}{n} \times \left(1 - \frac{1}{n}\right)\right) = \frac{1}{n}\left(1 - \frac{1}{n}\right)^2. \end{aligned}$$

et plus géneralement

$$\mathbb{P}(X = k) = \frac{1}{n} \times \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{k-1}$$

On reconnaît la loi géométrique de paramètre $1/n$.

Exercice 12 *Ciel gris*
Dans un pays très pluvieux, il pleut un jour donné avec probabilité 1 s'il n'a pas plu la veille, et avec probabilité 1/2 s'il a plu la veille. Montrez qu'il y a en moyenne 243 jours de pluie par an.
On définit les variables X_i qui valent 1 s'il pleut le jour i et 0 sinon. D'après l'énoncé, on a

$$\mathbb{P}(X_i = 1 \mid X_{i-1} = 1) = 1/2, \qquad \mathbb{P}(X_i = 1 \mid X_{i-1} = 0) = 1.$$

Le nombre de jour de pluie dans l'année est $S = \sum_{i=1}^{365} X_i$. Par linéarité $\mathbb{E}(S) = \sum_{i=1}^{365} \mathbb{E}(X_i)$. La calcul de $\mathbb{E}(X_i)$ donne :

$$\mathbb{E}(X_i) = \mathbb{P}(X_i = 1) = \mathbb{P}(X_i = 1 \mid X_{i-1} = 1)\mathbb{P}(X_{i-1} = 1) + \mathbb{P}(X_i = 1 \mid X_{i-1} = 0)\mathbb{P}(X_{i-1} = 0),$$

$$\textit{i.e.,} \qquad \mathbb{E}(X_i) = \frac{1}{2} \times \mathbb{P}(X_{i-1} = 1) + \mathbb{P}(X_{i-1} = 0) = \frac{1}{2} \times \mathbb{P}(X_{i-1} = 1) + 1 - \mathbb{P}(X_{i-1} = 1),$$

ou encore

$$\mathbb{E}(X_i) = 1 - \frac{1}{2} \times \mathbb{P}(X_{i-1} = 1) = 1 - \frac{1}{2} \times \mathbb{E}(X_{i-1}).$$

On a naturellement $\mathbb{E}(X_i) = \mathbb{E}(X_{i-1})$ pour tout i, d'où $\mathbb{E}(X_i) = 2/3$ et

$$\mathbb{E}(S) = 365 \times \mathbb{E}(X_1) = 365 \times \frac{2}{3} \sim 243.$$

Exercice 13 *Exemple de variable à densité*
Soit f la fonction définie par $f(x) = \frac{4}{3}(1-x)^{1/3}$ si $x \in [0,1]$ et $f(x) = 0$ sinon.

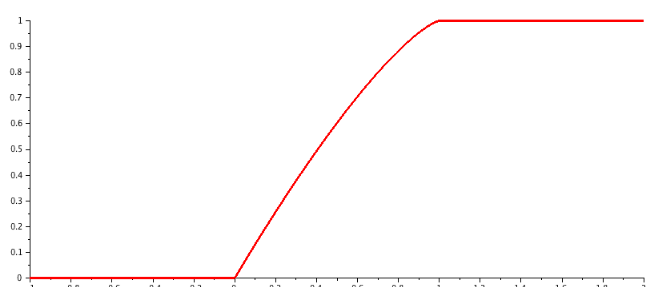
1. Montrer que f est la densité d'une variable aléatoire X.
   La fonction f est positive et on a

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)dx = \int_0^1 \frac{4}{3}(1-x)^{1/3}dx = \left[-(1-x)^{4/3}\right]_0^1 = 1,$$

   donc f est bien une densité de probabilité.
2. Déterminer la fonction de répartition de X et la tracer.
   La fonction de répartion $F(x)$ associée est donnée par

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(u)du = \begin{cases} 0 \text{ si } x \leq 0, \\ \displaystyle\int_0^x \frac{4}{3}(1-u)^{1/3}du = \left[-(1-u)^{4/3}\right]_0^x = 1 - (1-x)^{4/3}. \end{cases}$$

   Son graphe est le suivant :



3. Calculer l'espérance de X.
D'après le cours, l'espérance de X est donnée par la formule :

$$\mathbb{E}[X] = \int_{\mathbb{R}} x f(x) dx = \int_0^1 x \times \frac{4}{3}(1-x)^{1/3} dx.$$

En intégrant par parties, il vient

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[X] &= \left[x \times \left(-(1-x)^{4/3}\right)\right]_0^1 + \int_0^1 (1-x)^{4/3} dx \\ &= 0 + \left[-\frac{3}{7} \times (1-x)^{7/3}\right]_0^1 = \frac{3}{7}.\end{aligned}$$

Exercice 14 *Maximum et minimum*
Soient $X_1, X_2, \ldots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes et de même loi. On note F leur fonction de répartition commune. On note $Y = \min(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ et $Z = \max(X_1, X_2, \ldots, X_n)$.

1. Exprimer les fonctions de répartition F_Y et F_Z des variables Y et Z en fonction de F ;
On a pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}F_Y(x) = \mathbb{P}(Y \leq x) &= 1 - \mathbb{P}(Y > x) = 1 - \mathbb{P}(X_1 > x, X_2 > x, \ldots, X_n > x) \\ &\overset{\perp}{=} 1 - \mathbb{P}(X_1 > x)\mathbb{P}(X_2 > x) \ldots \mathbb{P}(X_n > x) \\ &= 1 - (1 - \mathbb{P}(X_1 \leq x)) \ldots (1 - \mathbb{P}(X_n \leq x)) \\ &= 1 - (1 - F(x)) \ldots (1 - F(x)) \\ &= 1 - (1 - F(x))^n.\end{aligned}$$

De la même façon, on a

$$\begin{aligned}F_Z(x) = \mathbb{P}(Z \leq x) &= \mathbb{P}(X_1 \leq x, X_2 \leq x, \ldots, X_n \leq x) \\ &\overset{\perp}{=} \mathbb{P}(X_1 \leq x)\mathbb{P}(X_2 \leq x) \ldots \mathbb{P}(X_n \leq x) \\ &= F(x)^n.\end{aligned}$$

2. Expliciter F_Y et F_Z lorsque les X_i sont des variables de loi géométrique $\mathcal{G}(p)$;
Par définition, si X est une variable géométrique de paramètre p, alors pour tout entier $\ell \geq 1$ on a $\mathbb{P}(X = \ell) = p(1-p)^{\ell-1}$. On en déduit que pour tout entier k positif

$$\mathbb{P}(X > k) = \sum_{\ell=k+1}^{\infty} \mathbb{P}(X = \ell) = \sum_{\ell=k+1}^{\infty} p(1-p)^{\ell-1} = (1-p)^k.$$

Autrement dit, $F(k) = \mathbb{P}(X \leq k) = 1 - \mathbb{P}(X > k) = 1 - (1-p)^k$. On déduit ensuite l'expression de F_Y et F_Z grâce à la première question.

3. Expliciter la densité des Y et Z lorsque les X_i sont des variables de loi uniforme $U_{[0,1]}$.
Dans le cas où les X_i sont des variables uniformes, on a simplement $F(x) = x$ sur l'intervalle $[0, 1]$ et à nouveau, on en déduit facilement l'expression de F_Y et F_Z grâce à la première question.