Éléments de correction du contrôle continu # 1

Exercice 1 *Mal de tête*
En cas de migraine, trois personnes sur cinq prennent un traitement A et deux sur cinq prennent un médicament alternatif B. Avec le médicament A, 75% des migraineux sont soulagés, contre 90% avec le médicament B.
On note simple A, B, S, les évènements “prendre le médicament A”, “prendre le médicament B”, “être soulagé”. L'énoncé fournit les informations suivantes :

$$\mathbb{P}(A) = \frac{3}{5}, \quad \mathbb{P}(B) = \frac{2}{5}, \quad \mathbb{P}(S|A) = \frac{75}{100}, \quad \mathbb{P}(S|B) = \frac{90}{100}.$$

1. Quelle est la probabilité de prendre le médicament B et d'être soulagé ?
   Par définition de la probabilité conditionnelle, on a
   $$\mathbb{P}(B \cap S) = \mathbb{P}(S|B)\mathbb{P}(B) = \frac{90}{100} \times \frac{2}{5} = \frac{9}{25}.$$
2. Quel est le taux global de personnes soulagées ?
   D'après la formule des probabilités totales, on a
   $$\mathbb{P}(S) = \mathbb{P}(S|A)\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(S|B)\mathbb{P}(B) = \frac{75}{100} \times \frac{3}{5} + \frac{90}{100} \times \frac{2}{5} = \frac{81}{100}.$$
3. Quelle est la probabilité pour un patient d'avoir pris le médicament A sachant qu'il est soulagé ?
   D'après la formule d'inversion du conditionnement, on a
   $$\mathbb{P}(A|S) = \frac{\mathbb{P}(S|A)\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(S)} = \frac{75}{100} \times \frac{3}{5} \times \frac{100}{81} = \frac{15}{27}.$$

Exercice 2 *Dépistage et formule de Bayes*
Dans cet exercice, on se propose d'évaluer la qualité d'un test de dépistage d'une maladie, d'abord théoriquement, puis sur des exemples concrets. On suppose ainsi qu'une maladie atteint une proportion p_M de la population et que l'on dispose d'un test de dépistage de cette maladie. On note $p_{\oplus|M^c}$ le taux de faux positif et on note $p_{\oplus|M}$ la proportion des malades sur lesquels le test réagit positivement.

1. En fonction de p_M, $p_{\oplus|M^c}$ et $p_{\oplus|M}$, déterminer l'expression littérale de la probabilité qu'un individu dont le test est positif soit effectivement malade.
   Avec des notations évidentes, la formule de Bayes s'écrit
   $$\begin{aligned}\mathbb{P}(M|\oplus) &= \frac{\mathbb{P}(\oplus|M)\mathbb{P}(M)}{\mathbb{P}(\oplus|M)\mathbb{P}(M) + \mathbb{P}(\oplus|M^c)\mathbb{P}(M^c)} = \frac{\mathbb{P}(\oplus|M)\mathbb{P}(M)}{\mathbb{P}(\oplus|M)\mathbb{P}(M) + \mathbb{P}(\oplus|M^c)(1-\mathbb{P}(M))} \\ &= \frac{p_{\oplus|M}p_M}{p_{\oplus|M}p_M + p_{\oplus|M^c}(1-p_M)}.\end{aligned}$$

2. Les statistiques montrent que 1% des femmes de plus de 50 ans sont atteintes par un cancer du sein. Une mammographie permet la détection d'un tel cancer dans 9 cas sur 10. Le taux de fausse détection est de 9%. Quel est la probabilité d'avoir un cancer du sein si la mammographie est positive ?
   On applique la formule précédente avec $p_M = 1\%$, $p_{\oplus|M} = 9/10$, $p_{\oplus|M^c} = 9\%$. On trouve $\mathbb{P}(M|\oplus) \approx 9,2\%$.
3. Le cancer du colon atteint 0,3% de la population. Le test est positif pour 50% des patients malades. Le taux de faux-positif est de 3%. Quel est la probabilité de ne pas souffrir d'un cancer du colon sachant que le test est positif ?
   On cherche cette fois $\mathbb{P}(M^c|\oplus) = 1 - \mathbb{P}(M|\oplus)$ où $\mathbb{P}(M|\oplus)$ est donnée par la formule de la première question et les données $p_M = 0,3\%$, $p_{\oplus|M} = 50\%$, $p_{\oplus|M^c} = 3\%$. On trouve $\mathbb{P}(M^c|\oplus) \approx 95,2\%$.
4. Le test double standard (ELIZA et Western-Blot) détectent dans 99,9% des cas le VIH et le taux de faux-positif est de 0,01%. Une personne sans facteurs de risque particuliers appartient à un groupe dans lequel seulement 0,01% portent le virus VIH. Son test et positif. Quel est la probabilité que cette personne soit porteuse du VIH ?
   Les données sont cette fois $p_M = 0,01\%$, $p_{\oplus|M} = 99,9\%$, $p_{\oplus|M^c} = 0,01\%$ et on obtient par la formule de la première question $\mathbb{P}(M|\oplus) \approx 50\%$.

Exercice 3 *Jeu d'argent*
On considère un jeu dont les règles sont les suivantes. Pour jouer, il faut verser 10 euros. On lance ensuite deux pièces de monnaie équilibrées. Si l'on fait deux fois "pile", on perd 5 euros. Si l'on fait une fois "face" exactement, on gagne 12 euros. Enfin, si l'on fait deux fois "face", on gagne 20 euros.

1. Quelles sont les valeurs possibles pour le gain / la perte du joueur ?
   Les valeurs possibles pour le gain sont $-10-5$, $12-10$ et $20-10$, c'est-à-dire -15, 2 et 10. Si on note X le gain, on a ainsi

$$\mathbb{P}(X=-15) = \mathbb{P}(\text{deux pile}) = \frac{1}{4}, \quad \mathbb{P}(X=2) = \mathbb{P}(\text{1 pile, 1 face}) = \frac{1}{2},$$

$$\mathbb{P}(X=10) = \mathbb{P}(\text{deux face}) = \frac{1}{4}.$$

2. Calculer l'espérance du gain / de la perte.
   On a alors

$$\mathbb{E}[X] = (-15) \times \frac{1}{4} + (2) \times \frac{1}{2} + (10) \times \frac{1}{4} = \frac{-15+4+10}{4} = -\frac{1}{4}.$$

   En moyenne, le joueur est donc perdant.
3. Toutes choses égales par ailleurs, quel devrait être le gain lorsque l'on fait deux fois "face" pour le jeu soit équilibré ?
   On note x le gain si l'on fait deux fois "face". Comme plus haut, on a alors

$$\mathbb{E}[X] = (-15) \times \frac{1}{4} + (2) \times \frac{1}{2} + (x-10) \times \frac{1}{4} = \frac{-15+4+(x-10)}{4}.$$

   Le jeu est équilibré si $\mathbb{E}[X] = 0$ c'est-à-dire $-15+4+(x-10) = 0$, autrement dit $x = 21$.