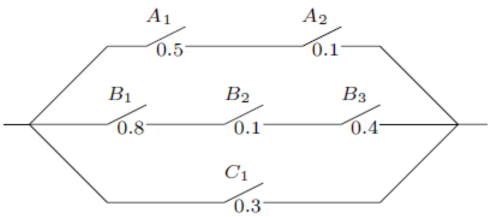
Contrôle continu # 2

Durée 1h30, documents interdits, calculatrice autorisée.

Exercice 1 *Courant électrique* (5 points)



On considère le circuit électrique ci-contre. Chaque relais est en position ouverte ou fermée, la probabilité qu'il soit ouvert étant indiquée sur la figure et les relais se comportant de façon totalement indépendante.

1. Quelle est la probabilité que le courant passe dans les branches A, B, C respectivement ? 3 points
2. Quelle est la probabilité que le courant passe, c'est-à-dire qu'il existe au moins une branche sur laquelle tous les relais sont fermés ? 2 points

Exercice 2 *La stratégie de l'échec* (7 points)
Un test d'évaluation comporte 100 questions, chaque question ayant 5 réponses possibles A, B, C, D ou E, dont une seule est correcte. Les auteurs du test font en sorte que les bonnes réponses soient réparties uniformément au hasard entre les réponses A, B, C, D et E.

1. Combien y a-t-il de réponses possibles au test ? 1 point
2. Un premier candidat répond totalement au hasard. Quelle est alors la loi de la variable aléatoire donnant le nombre de bonnes réponses ? Quelle est la probabilité qu'il ait entre 20 et 22 bonnes réponses (sous forme littérale et numérique) ? 2 points
3. Pour les grandes valeurs de n, la loi binomiale de paramètres (n, p) peut sous certaines conditions être approchée par une loi normale.
   (a) Ces conditions sont-elles vérifiées dans la situation présente ? 1 point
   (b) Quelle valeur obtient-on pour la probabilité que le premier candidat ait entre 20 et 22 bonnes réponses avec cette approximation ? 1 point
4. Un deuxième candidat suit une autre stratégie : il répond systématiquement la réponse D. Quelle est la loi de la variable donnant le nombre de bonnes réponses avec cette stratégie ? Estimer la probabilité que le second candidat ait entre 20 et 24 bonnes réponses. 2 points

Exercice 3 *Hypertension* (8 points)
Dans deux pays A et B aux habitudes alimentaires distinctes, on considère un échantillon de 500 personnes (300 hommes et 200 femmes à chaque fois), dont on mesure la tension artérielle. Les effectifs obtenus sont présentés au verso.

1. Dans la population A, on veut tester au niveau de confiance 95%, s'il existe un lien entre le genre d'un individu et sa tension artérielle.
   (a) Parmi les statistiques présentées au verso, laquelle faut-il considérer ici ? Justifier. 1 point
   (b) Expliciter la zone de rejet du test et conclure. 1 point
2. On s'intéresse plus particulièrement à la population masculine. On souhaite savoir si les fréquences des hypertendus/"normaux"/hypotendus sont les mêmes dans les deux pays A et B. À cette fin, au niveau de confiance 95%, on met en place un test du χ^2 d'adéquation des fréquences de la population B à la loi cible $\pi = (72/300, 192/300, 36/300)$.
   (a) Parmi les statistiques présentées au verso, laquelle faut-il considérer ici ? Justifier. 1 point
   (b) Expliciter la zone de rejet du test et conclure. 1 point

3. Sans faire de distinction entre homme et femme, on souhaite enfin déterminer, au niveau de confiance 90%, si la proportion d'hypertendus est la même dans le pays A et dans le pays B. Les effectifs cumulés sont présentés ci-dessous.
   (a) Répondre à la question en effectuant un test du χ^2 d'adéquation. 2 points
   (b) Répondre à la question en effectuant un test basé sur une approximation gaussienne de la loi binomiale. 2 points

Les données pour les questions 1 et 2 de l'exercice 2 :

Population A :

Observé	Hypertension	Tension normale	Hypotension
Homme	72	192	36
Femme	38	118	44

Population B :

Observé	Hypertension	Tension normale	Hypotension
Homme	75	187	38
Femme	30	127	43

Les effectifs cumulés des hypertendus pour la question 3 de l'exercice 2 :

Observé	A	B	Total
Hypertendus	110	105	215

Quelques données numériques utiles :

$$\mathbb{P}(\mathcal{N}(0,1) < 0) = 1/2, \quad \mathbb{P}(\mathcal{N}(0,1) \leq 1/2) \approx 0.691, \quad \mathbb{P}(\mathcal{N}(0,1) \leq 1) \approx 0.841,$$

$$\mathbb{P}(|\mathcal{N}(0,1)| > 1,64) = 10\%, \quad \mathbb{P}(\chi^2(2) > 5,99) = 5\%, \quad \mathbb{P}(\chi^2(5) > 11,07) = 5\%,$$

$$\mathbb{P}(\chi^2(1) > 3,84) = 5\%, \quad \mathbb{P}(\chi^2(1) > 2,71) = 10\%, \quad \mathbb{P}(\chi^2(2) > 4,61) = 10\%.$$

Différentes statistiques :

A)

$$F_{500}^{obs} = 500 \times \left(\left(\frac{\left(\frac{75}{500} - \frac{105}{500}\frac{300}{500}\right)^2}{\frac{105}{500}\frac{300}{500}} \right) + \ldots + \left(\frac{\left(\frac{43}{500} - \frac{81}{500}\frac{200}{500}\right)^2}{\frac{81}{500}\frac{200}{500}} \right) \right) \approx 11,52.$$

B)

$$F_{500}^{obs} = 500 \times \left(\left(\frac{\left(\frac{72}{500} - \frac{110}{500}\frac{300}{500}\right)^2}{\frac{110}{500}\frac{300}{500}} \right) + \ldots + \left(\frac{\left(\frac{44}{500} - \frac{80}{500}\frac{200}{500}\right)^2}{\frac{80}{500}\frac{200}{500}} \right) \right) \approx 9,35.$$

C)

$$F_{500}^{obs} = 500 \times \left(\left(\frac{\frac{72}{500} - \frac{110}{500}\frac{300}{500}}{\frac{110}{500}\frac{300}{500}} \right)^2 + \ldots + \left(\frac{\frac{44}{500} - \frac{80}{500}\frac{200}{500}}{\frac{80}{500}\frac{200}{500}} \right)^2 \right) \approx 116,68.$$

D)

$$F_{300}^{obs} = 300 \times \left(\left(\frac{\frac{75}{300} - \frac{72}{300}}{\frac{72}{300}} \right)^2 + \ldots + \left(\frac{\frac{38}{300} - \frac{36}{300}}{\frac{36}{300}} \right)^2 \right) \approx 1,65.$$

E)

$$F_{300}^{obs} = 300 \times \left(\left(\frac{\left(\frac{75}{300} - \frac{72}{300}\frac{110}{300}\right)^2}{\frac{72}{300}\frac{110}{300}} \right) + \ldots + \left(\frac{\left(\frac{38}{300} - \frac{36}{300}\frac{80}{300}\right)^2}{\frac{36}{300}\frac{80}{300}} \right) \right) \approx 5,36.$$

F)

$$F_{300}^{obs} = 300 \times \left(\left(\frac{\left(\frac{75}{300} - \frac{72}{300}\right)^2}{\frac{72}{300}} \right) + \ldots + \left(\frac{\left(\frac{38}{300} - \frac{36}{300}\right)^2}{\frac{36}{300}} \right) \right) \approx 0,37.$$