

### FEUILLE DE TRAVAUX PRATIQUES # 3

#### Exercice 1 *Modèle de Wright-Fisher*

Soient  $k$  et  $N$  deux entiers tels que  $0 < k < N$ . On définit par récurrence une suite de variables  $(X_n^N)_{n \geq 0}$  de la façon suivante :  $X_0^N := k$  et pour tout  $n \geq 0$  et  $i \in \{0, \dots, N\}$ , la loi de  $X_{n+1}^N$  sachant que  $X_n^N = i$  est la loi binomiale  $\mathcal{B}(N, i/N)$ .

1. Écrire un programme qui prend en entrée les entiers  $k, N, n$  et qui génère et trace une trajectoire  $(X_m^N)_{m=0 \dots n}$ .
2. Mettre en évidence la convergence presque sûre de la suite  $(X_n^N)_{n \geq 0}$  vers une variable  $X_\infty^N$  à valeurs dans  $\{0, N\}$ .
3. Estimer les probabilités de sortie  $\mathbb{P}(X_\infty^N = 0)$  et  $\mathbb{P}(X_\infty^N = N)$ .

#### Exercice 2 *Arbres de Galton-Watson géométriques*

On rappelle que la loi géométrique de paramètre  $p \in ]0, 1/2]$  sur  $\mathbb{N}$  est la loi  $P = \sum_{i \geq 0} p q^i \delta_i$  où l'on a posé  $q := 1 - p$ . Soit  $(X_{n,k})_{n \geq 1, k \geq 1}$  une famille de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées de loi  $P$ . On définit par récurrence une suite  $(Z_n)_{n \geq 0}$  telle que  $Z_0 := 1$  et pour  $n \geq 0$  :

$$Z_{n+1} := \sum_{k=1}^{Z_n} X_{n+1,k}.$$

La suite  $Z_n$  représente le nombre d'individus à la génération  $n$  d'un arbre de Galton-Watson de loi de reproduction  $P$ . On adopte ici la convention  $\sum_{\emptyset} = 0$  de sorte que si  $Z_n = 0$  alors  $Z_{n+1} = 0$ . On désigne par  $T := \inf\{n \geq 0, Z_n = 0\} \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$  le temps d'extinction de l'arbre. On note  $m := \mathbb{E}[Z_1]$  et  $\sigma^2 = \mathbb{E}[Z_1^2] - \mathbb{E}[Z_1]^2 \in \mathbb{R}_+$ .

1. Écrire un programme qui prend en entrée un entier  $n \in \mathbb{N}$ , le paramètre  $p$ , et qui génère et trace une trajectoire  $(Z_k)_{k=0 \dots n}$ .
2. À  $n$  fixé, utiliser la méthode de Monte Carlo pour vérifier numériquement que l'on a bien  $\mathbb{E}(Z_n) = m^n$ .
3. Lorsque la loi de reproduction est la loi géométrique de paramètre  $p$ , la probabilité d'extinction  $\mathbb{P}(T < +\infty)$  est égale à  $p/q$ . Retrouver numériquement ce résultat.
4. On suppose ici que  $m = 1$ . Par la méthode de Monte Carlo, mettre numériquement en évidence les faits suivants :
  - (a)  $\lim_{n \rightarrow +\infty} n \mathbb{P}(Z_n > 0) = 2/\sigma^2$  ;
  - (b)  $\mathcal{L}(Z_n/n | Z_n > 0)$  tend lorsque  $n$  tend vers l'infini vers la loi exponentielle  $\mathcal{E}(2/\sigma^2)$ .
5. Lorsque  $m > 1$ , mettre en évidence la convergence de la suite  $Y_n := Z_n/m^n$  vers une variable aléatoire  $Y_\infty$ . Vérifier numériquement que  $\mathbb{E}[Y_\infty] = 1$  et  $\text{var}(Y_\infty) = \sigma^2/(m^2 - m)$  .