Feuille de travaux pratiques # 2

Exercice 1 : *Ruine du joueur*
Soit $(S_n)_{n\geq 0}$ une marche aléatoire simple sur $\mathbb{Z}$: $S_0 := 0$, $S_n := X_1 + \ldots + X_n$ pour $n \geq 1$, où les variables X_i sont indépendantes et de même loi $0 < \mathbb{P}(X_i = 1) = p < 1$, $\mathbb{P}(X_i = -1) = 1 - p =: q$.

1. Écrire une fonction qui prend en entrée un entier $n \in \mathbb{N}$, et réel $p \in]0, 1[$ et qui génère et trace une trajectoire de longueur n de la marche $(S_k)_{k\geq 0}$.
2. Dans les cas $p \neq 1/2$ puis $p = 1/2$, quel est l'ordre de grandeur de S_n ?
3. On fixe maintenant des entiers $0 \leq k \leq m$ et l'on suppose que $S_0 = k$. On pose $\rho = q/p$ et on considère le temps d'arrêt $T := \inf\{n \geq 0,\ S_n = 0 \text{ ou } S_n = m\}$. Retrouver par simulation les résultats théoriques suivants :
   (a) Lieu de sortie :
$$\mathbb{P}(S_T = 0) = \begin{cases} 1 - \dfrac{k}{m} & \text{si } p = q = 1/2, \\[2ex] 1 - \dfrac{1-\rho^k}{1-\rho^m} & \text{si } p \neq q. \end{cases}$$
   (b) Temps de sortie :
$$\mathbb{E}[T] = \begin{cases} k(m-k) & \text{si } p = q = 1/2, \\[2ex] \dfrac{m}{p-q}\left(\dfrac{1-\rho^k}{1-\rho^m} - \dfrac{k}{m}\right) & \text{si } p > q. \end{cases}$$

Exercice 2 : *Urne de Pólya*
Une urne contient 1 boule rouge et 1 boules blanche. On tire une boule au hasard (uniformément) dans l'urne, on regarde sa couleur, puis on la replace en ajoutant une boule de la même couleur, ce qui donne la nouvelle composition de l'urne après l'instant 1. On itère ensuite la même procédure. Après l'instant n, il y a ainsi $n + 2$ boules dans l'urne. On désigne par X_n le nombre de boules rouges dans l'urne après l'instant n, par $M_n = \frac{X_n}{n+2}$ la proportion de boules rouges et par $\mathcal{F}_n = \sigma(X_0, \ldots, X_n) = \sigma(M_0, \ldots, M_n)$ la tribu engendrée.

1. Écrire un programme qui prend en entrée un entier $n \in \mathbb{N}$ et qui génère et trace une trajectoire de la martingale M_n.
2. Mettre en évidence la convergence de la martingale (M_n) et estimer la loi de la variable limite en traçant l'histogramme empirique.

Exercice 3 : *Convergence de martingales*
Soit $(X_n)_{n\geq 0}$ une suite de variables aléatoires i.i.d. de loi $\mathcal{N}(0, 1)$. Discuter la convergence des martingales suivantes :
$$M_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{X_i X_{i-1}}{i}, \qquad N_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{X_i X_{i-1}}{\sqrt{i}}.$$