

FEUILLE D'EXERCICES # 9

Exercice 1 *Retour sur la chaîne à deux états*

Pour $p \in [0, 1]$ et $q \in [0, 1]$, on considère une chaîne de Markov d'états $\{0, 1\}$ et de matrice de transition

$$Q := \begin{pmatrix} p & 1-p \\ 1-q & q \end{pmatrix}.$$

1. Sous quelles conditions la chaîne est-elle apériodique irréductible ? Quelles sont les lois stationnaires ?
2. Que se passe-t-il lorsque la chaîne n'est pas irréductible ou périodique ? Quels sont alors les états récurrents et transients ? Quelles sont les lois stationnaires ?

Exercice 2 *Σισυφος*

Soit (X_n) une chaîne de Markov d'espace d'états $E = \mathbb{N}$, et dont la matrice de transition est donnée par $Q(n, n+1) = \theta_n$ et $Q(n, 0) = 1 - \theta_n$, où $0 < \theta_n < 1$ pour $n \geq 0$.

1. Étudier la nature de l'état 0, puis des autres états.
2. Existe-t-il une mesure réversible, invariante ?

Exercice 3 *Chaîne de naissance et de mort*

Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une chaîne de Markov à valeurs dans \mathbb{N} telle que $X_0 := a \in \mathbb{N}^*$, et pour $n \geq 0$,

$$\begin{cases} \mathbb{P}(X_{n+1} = k+1 | X_n = k) = p_k, \\ \mathbb{P}(X_{n+1} = k-1 | X_n = k) = q_k, \end{cases} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} p_k + q_k = 1, \\ p_k > 0, q_k > 0, \end{cases} \quad \text{pour } k \geq 1,$$

et $\mathbb{P}(X_{n+1} = 0 | X_n = 0) = 1$. On cherche à exprimer la probabilité d'extinction c'est-à-dire $h_i := \mathbb{P}_i(\exists n, X_n = 0)$. Pour tout $k \geq 1$, on suppose que $p_k > 0$ et on pose $\gamma_k := \frac{q_k q_{k-1} \cdots q_1}{p_k p_{k-1} \cdots p_1}$.

1. Déterminer une relation de récurrence vérifiée par la suite $(h_i)_{i \in \mathbb{N}}$.
2. Suivant que $\sum_{k \geq 1} \gamma_k$ est finie ou non, exprimer h_i .
3. Déterminer les mesures réversibles pour la chaîne X_n .
4. À quelle condition existe-t-il une mesure de probabilité réversible ?

Exercice 4 *Entomologie*

Une puce saute chaque seconde au hasard d'un sommet d'un triangle à un autre, indépendamment et uniformément. Une tique, quant à elle, choisit deux fois plus souvent de sauter dans le sens direct que dans le sens indirect. Quelles sont les mesures réversibles (resp. invariantes) des deux dynamiques ? Dans les deux cas, calculer la probabilité que l'animal se retrouve à son sommet de départ au bout de n sauts.

Exercice 5 *Réversibilité modulo n*

On fixe $n \geq 2$ et on considère la marche aléatoire simple sur $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, dont la matrice de transition est donnée par $Q(i, i+1) = p$, $Q(i, i-1) = 1-p$ où $0 < p < 1$. Montrer que la chaîne est réversible si et seulement si $p = 1/2$.

Exercice 6 *La chaîne serpent*

Soit $(X_n)_{n \geq 0}$ une chaîne de Markov sur E de transition Q . Pour $\ell \geq 1$, on définit une nouvelle suite à valeurs dans $F = E^{\ell+1}$ en posant $Y_n := (X_n, X_{n+1}, \dots, X_{n+\ell})$.

1. Montrez que c'est une chaîne de Markov et précisez sa matrice de transition.
2. Montrez que si $(X_n)_{n \geq 0}$ est irréductible, il en est de même pour $(Y_n)_{n \geq 0}$ si on restreint l'espace d'état à $\tilde{F} = \{(i_0, \dots, i_\ell) \in E^{\ell+1}, Q(i_0, i_1)Q(i_1, i_2) \dots Q(i_{\ell-1}, i_\ell) > 0\}$.
3. Montrez que si $(X_n)_{n \geq 0}$ a une distribution stationnaire π , alors $(Y_n)_{n \geq 0}$ a aussi une distribution stationnaire.

Exercice 7 *Chaîne pressée*

Soient E un ensemble au plus dénombrable, Q une matrice de transition sur E et $(X_n)_{n \geq 0}$ la chaîne de Markov canonique associée. On suppose que pour tout $x \in E$, on a $Q(x, x) < 1$. On définit alors une suite de variables aléatoires à valeurs entières $\tau_0 := 0$, $\tau_1 := \inf\{n \geq 1, X_n \neq X_0\}$ et pour $n \geq 1$, $\tau_{n+1} := \tau_n + \tau_1 \circ \theta_{\tau_n}$.

1. Montrer que τ_1 est un temps d'arrêt et que pour tout $x \in E$, τ_1 est fini \mathbb{P}_x -presque sûrement. Calculer la loi de τ_1 ainsi que celle de X_{τ_1} .
2. Donner une autre façon de définir la suite $(\tau_n)_{n \geq 0}$ et montrer que les τ_n sont des temps d'arrêt.
3. Montrer que la suite $(Y_n)_{n \geq 0} := (X_{\tau_n})_{n \geq 0}$ est une chaîne de Markov par rapport à la filtration (\mathcal{F}_{τ_n}) . Quelle est sa matrice de transition ?
4. On suppose que (X_n) est irréductible récurrente de mesure invariante μ . Montrer que la chaîne (Y_n) est également irréductible récurrente et que $\pi(y) := (1 - Q(y, y))\mu(y)$ est une mesure invariante pour cette dernière.

Exercice 8 *Estimation des probabilités de transition*

Soit $(X_n)_{n \geq 0}$ une chaîne de Markov sur E , irréductible récurrente positive, de distribution stationnaire π .

1. Quelle est la loi invariante de la chaîne $((X_n, X_{n+1}, \dots, X_{n+\ell}))_{n \geq 0}$?
2. En déduire que si $g : E^{\ell+1} \rightarrow \mathbb{R}_+$ est telle que $\mathbb{E}_\pi[g(X_0, \dots, X_\ell)] < +\infty$, alors pour toute loi initiale μ , \mathbb{P}_μ -presque sûrement, lorsque n tend vers l'infini, on a :

$$\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} g(X_k, X_{k+1}, \dots, X_{k+\ell}) \longrightarrow \mathbb{E}_\pi[g(X_0, \dots, X_\ell)].$$

On suppose que Q et π sont inconnues. On souhaite estimer les probabilités de transition $Q(i, j)$ à l'aide de la seule observation d'une trajectoire $(X_n(\omega))_{n \geq 0}$.

3. Soit $(i, j) \in E^2$, déterminer les limites presque sûre lorsque n tend vers l'infini de

$$\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{1}_{\{X_k=i\}} \quad \text{et} \quad \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{1}_{\{X_k=i, X_{k+1}=j\}}.$$

4. En déduire un estimateur consistant de la probabilité de transition $Q(i, j)$.