Feuille d'exercices # 8

Exercice 1 *Pour se faire la main*
Sur les espaces d'états $\{1,2,3,4\}$ et $\{1,2,3,4,5\}$ respectivement, on considère des chaînes de Markov de matrices de transitions respectives :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/4 & 1/4 & 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

Déterminer les états transitoires et les classes de récurrence de ces chaînes.

Exercice 2 *Classification et probabilités d'absorption I*
Sur l'ensemble $\{1,2,3,4,5\}$, on considère une chaîne de Markov $(X_n)_{n\geq 0}$ de matrice de transition :

$$Q := \begin{pmatrix} 4/10 & 3/10 & 3/10 & 0 & 0 \\ 0 & 5/10 & 0 & 5/10 & 0 \\ 5/10 & 0 & 5/10 & 0 & 0 \\ 0 & 5/10 & 0 & 5/10 & 0 \\ 0 & 3/10 & 0 & 3/10 & 4/10 \end{pmatrix}.$$

1. Quels sont les états récurrents, transitoires ?
2. Déterminer la (ou les) loi(s) stationnaire(s).
3. Sans faire aucun calcul, déterminer les probabilités d'absorption dans la (ou les) classe(s) de récurrence.

Exercice 3 *Classification et probabilités d'absorption II*
On considère une chaîne de Markov $(X_n)_{n\geq 0}$ à valeurs dans $E = \{1,2,\ldots,6\}$ et de matrice de transition

$$Q := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/5 & 2/5 & 2/5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/6 & 1/3 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1/4 & 0 & 3/4 \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer quels sont les états transitoires et les états récurrents.
2. Calculer les probabilités d'absorption dans les classes de récurrence.
3. Déterminer les mesures invariantes de la chaîne.

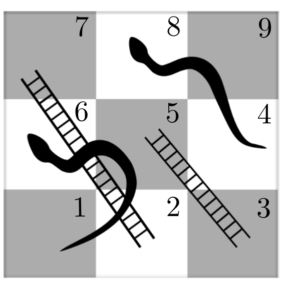
Exercice 4 *Ruine du petit joueur*

A joue contre B une suite de pile ou face non biaisés et indépendants. À chaque partie, le joueur qui gagne reçoit 1 euro, l'autre en perd un. La somme de leurs fortunes, constante au cours du jeu, est de 4 euros. Le jeu s'arrête lorsque l'un des deux joueurs est ruiné. On modélise l'évolution de la fortune de A par une chaîne de Markov $(X_n)_{n\geq 0}$ à valeurs dans $E = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ dont la matrice de transition donnée ci-dessous. On admettra que lorsque n tend vers l'infini, la puissance $n-$ième de la matrice Q converge vers la matrice Q_∞ également donnée ci-dessous.

$$Q := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad Q_\infty := \lim_{n\to+\infty} Q^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3/4 & 0 & 0 & 0 & 1/4 \\ 1/2 & 0 & 0 & 0 & 1/2 \\ 1/4 & 0 & 0 & 0 & 3/4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Établir la classification des états de la chaîne ?
2. En déduire que lorsque n tend vers l'infini, X_n converge presque sûrement vers une variable aléatoire X_∞.
3. Si $X_0 \sim \mu = (\mu_0, \mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4)$, déterminer la loi de X_∞.
4. Montrer que tout probabilité invariante π pour la chaîne est nécessairement de la forme $\pi = (p, 0, 0, 0, 1-p)$, avec $p \in [0, 1]$.
5. Calculer les probabilités que le joueur A gagne le jeu, en fonction de sa fortune initiale $X_0 \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$.
6. Question facultative : en déduire la durée moyenne de la partie, conditionnellement à ce que le joueur A gagne le jeu, en fonction de $X_0 \in \{1, 2, 3, 4\}$.

Exercice 5 *Serpents et échelles*



On joue au jeu suivant : un joueur débute à la case 1 et à chaque temps n, lance une pièce équilibrée. Selon le résultat, il avance d'une ou deux cases sur le plateau de jeu. S'il arrive au pied d'une échelle, il grimpe en haut de l'échelle ; s'il arrive sur la tête d'un serpent, il descend à la queue. Le but est d'atteindre la case 9.

1. Combien de tours en moyenne doit-on jouer pour terminer le jeu ?
2. Quelle est la probabilité qu'un joueur ayant atteint la case 5 termine le jeu sans retomber à la case 1 ?

Exercice 6 *Classification des états dans le modèle de Wright-Fisher*

Soient k et N deux entiers tels que $0 < k < N$. On considère la chaîne de Markov $(X_n^N)_{n\geq 0}$ à valeurs dans $E := \{0, \dots, N\}$, issue de $X_0^N := k$ et dont la matrice de transition est donnée par :

$$Q_{ij} = \mathbb{P}(X_{n+1}^N = j | X_n^N = i) = \binom{N}{j} \left(\frac{i}{N}\right)^j \left(1 - \frac{i}{N}\right)^{N-j}.$$

1. Déterminer les états récurrents et transitoires de la chaîne.
2. Même question si on considère le modèle avec taux de mutation $(u, v) \in]0, 1[^2$, c'est-à-dire la chaîne $(\widetilde{X}_n^N)_{n\geq 0}$ dont la matrice de transition est

$$\widetilde{Q}_{ij} = \binom{N}{j} \left((1-u)\frac{i}{N} + v\left(1 - \frac{i}{N}\right)\right)^j \left((u\frac{i}{N} + (1-v)\left(1 - \frac{i}{N}\right)\right)^{N-j}.$$