Université de Rennes 1 — Master 1 Mathématique
Martingales et chaînes de Markov — année 2014-2015

Feuille d'exercices # 7

Exercice 1 *Autour de la propriété de Markov simple*
Soit $(X_n)_{n\geq 0}$ une chaîne de Markov sur un espace dénombrable E, de matrice de transition Q. Pour tout $y \in \mathbb{E}$, on note $T_y := \inf\{n \geq 0,\ X_n = y\}$. Établir les relations suivantes :

i) $Q_n(x,y) = \sum_{m=1}^{n} \mathbb{P}_x(T_y = m) Q_{n-m}(y,y)$;

ii) $\mathbb{P}_x(T_y = n+1) = \sum_{z\neq y} Q(x,z)\mathbb{P}_z(T_y = n)$;

iii) $\mathbb{P}_x(T_y < +\infty) = Q(x,y) + \sum_{z\neq y} Q(x,z)\mathbb{P}_z(T_y < +\infty)$.

Exercice 2 *Niveaux d'une marche aléatoire simple*
Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de loi uniforme sur $\{-1,+1\}$. On pose $S_0 = 0$ et pour $n \geq 1$: $S_n := \sum_{k=1}^{n} X_k$. Pour $a \in \mathbb{N}$, on note $T_a := \inf\{n \geq 0,\ S_n = a\}$ le temps d'atteinte de a par la chaîne $(S_n)_{n\geq 0}$.

1. Montrer que pour tout $a \in \mathbb{N}$, T_a est un temps d'arrêt fini presque sûrement.
2. Montrer que $(T_{a+1} - T_a)_{a\in\mathbb{N}}$ est une suite de variables i.i.d.

Exercice 3 *Excursions d'une marche aléatoire simple*
Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de loi uniforme sur $\{-1,+1\}$. On pose $S_0 := 0$ et pour $n \geq 1$: $S_n := \sum_{k=1}^{n} X_k$. On pose $T_0^0 := 0$ et par récurrence, on définit $T_0^{n+1} := \inf\{n > T_0^n,\ S_n = 0\}$ le temps $n+1-$ième temps de retour en zéro de la chaîne $(S_n)_{n\geq 0}$.

1. Montrer que la loi de $\Delta_0^n := T_0^{n+1} - T_0^n$ ne dépend pas de n.
2. Montrer que les excursions $(S_{T_0^k}, \ldots, S_{T_0^{k+1}})_{k\in\mathbb{N}}$ sont i.i.d.

Exercice 4 *Questions "simples" sur la classification des états*
Soit $(X_n)_{n\geq 0}$ une chaîne de Markov de matrice de transition Q à valeurs E au plus dénombrable. On adopte les notations du cours en particulier $N_y := \sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{1}_{X_n = y}$ et $G(x,y) := \mathbb{E}_x[N_y]$.

1. Donner un exemple où l'ensemble des points visités par la chaîne issue de x n'est pas déterministe, i.e. constant *p.s.* ;
2. Donner un exemple où, sans que x soit récurrent, sous $\mathbb{P}_x$, l'ensemble des points visités par la chaîne est *p.s.* toujours le même. Donner un exemple où, de plus, l'ordre des 3 premiers points visités en partant de x n'est pas déterministe.
3. Pour $x, y \in E$, a-t-on : (y récurrent et $\exists n$ tel que $Q_n(x,y) > 0$) $\Longrightarrow N_y = +\infty\ \mathbb{P}_x - p.s.$?
4. Donner un exemple où il existe n tel que $Q_n(x,y) > 0$ mais pour tout p, $Q_p(y,x) = 0$.
5. Montrer que pour $x, y \in E$, $(G(x,y) = +\infty) \Longrightarrow y$ récurrent. La réciproque est-elle vraie ?
6. Peut-on avoir $0 < G(x,y) < +\infty$ avec y récurrent ?
7. Si $G(x,y) = +\infty$, quelles valeurs peut prendre $G(y,x)$?
8. On suppose que pour tout $x \in E$, l'ensemble $V_x = \{y \in E | \exists n \geq 0,\ Q_n(x,y) > 0\}$ est fini. Montrer qu'il existe des états récurrents.
9. On suppose qu'il existe un état $x_0 \in E$ tel que pour tout $x \in E$, on a $\sum_n Q^n(x_0, x) > 0$ et $\mathbb{P}_x(T_{x_0} < +\infty) = 1$ où T_{x_0} est le temps d'atteinte de x_0. Est-ce que la chaîne est récurrente ?