Feuille d'exercices # 6

Exercice 1 : *Être ou ne pas être markovien*

1. On lance une pièce équilibrée : les résultats des lancers sont des variables aléatoires indépendantes Y_0, Y_1, ..., à valeurs dans $\{0, 1\}$. Pour tout $n \geq 1$, on pose $X_n := Y_n + Y_{n-1}$.
   (a) Calculer $\mathbb{P}(X_3 = 0 | X_1 = 0, X_2 = 1)$ et $\mathbb{P}(X_3 = 0 | X_2 = 1)$.
   (b) La suite (X_n) est-elle une chaîne de Markov ?
2. Une marche aléatoire auto-évitante est une marche aléatoire simple conditionnée à ne pas revenir en un site déjà visité. La marche aléatoire auto-évitante dans $\mathbb{Z}$ est-elle une chaîne de Markov ? dans $\mathbb{Z}^2$?
3. Soit $(\varepsilon_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de loi $\mathcal{B}(1/2)$ sur $\{-1, +1\}$. Par récurrence, on définit $X = (X_n)_{n\geq 0}$: $X_0 = 1$, $X_1 = 1$ et pour $n \geq 1$, $X_{n+1} = X_n + \varepsilon_n X_{n-1}$. On pose ensuite $Y = (Y_n)_{n\geq 0} = (X_{n+1}, X_n)_{n\geq 0}$ et $Z = (Z_n)_{n\geq 0} = (\varepsilon_{n+1}, \varepsilon_n)_{n\geq 0}$. Les suites X, Y, Z sont-elles des chaînes de Markov ?

Exercice 2 : *Marche aléatoire comme chaîne de Markov*
Soient $X_1, X_2, \ldots$ des variables aléatoires indépendantes et de même loi μ à valeurs entières, et soit $S_n := X_1 + X_2 + \ldots + X_n$. Montrer que $(S_n)_{n\geq 0}$ est une chaîne de Markov homogène et préciser sa matrice de transition.

Exercice 3 : *Retour en l'origine de la marche simple*
Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une marche aléatoire simple sur $\mathbb{Z}^d$ issue de zéro.

1. Calculer $\mathbb{P}(X_2 = 0)$ et $\mathbb{P}(X_{99} = 0)$.
2. Trouver une formule explicite pour $\mathbb{P}(X_{2n} = 0)$ dans le cas $d = 1$.

Exercice 4 : *Ruine du joueur*
Un joueur partant d'un capital initial de k euros fait une série de paris à 1 euro. On suppose que les paris sont indépendants, la probabilité de gagner est $p \in]0, 1[$. Si au cours des paris, le capital du joueur atteint 0, il est ruiné et ne peut plus jouer : son capital reste nul après. On désigne par X_n le capital du joueur à l'instant n.

1. Montrer que la suite $(X_n)_{n\geq 0}$ est une chaîne de Markov d'espace d'états $E = \mathbb{N}$, préciser sa matrice de transition.
2. Supposons maintenant que si son capital atteint un seuil $d \in \mathbb{N}^*$, le joueur s'arrête de jouer. Écrire la nouvelle matrice de transition.

Exercice 5 : *Quand les vaches ne regardent pas les trains*
Sur une route, en moyenne, trois camions sur quatre sont suivis par une voiture, tandis que seule une voiture sur cinq est suivie par un camion. Déterminer les proportions de voitures et de camions sur cette route.

Exercice 6 : *Exemple de chaîne à trois états*
Soient $E = \{1, 2, 3\}$ et $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une chaîne de Markov homogène sur E de matrice de transition

$$Q = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/4 & x \\ 1/5 & y & 1/2 \\ z & 1/6 & 1/7 \end{pmatrix} \text{ et de loi initiale } \mu = (1/2, 1/3, 1/6).$$

1. Déterminer x, y et z, et calculer la loi de X_2.
2. Déterminer la limite de Q^n lorsque n tend vers l'infini.

Exercice 7 : *Collection de caries*
Un enfant collectionne des images à coller dans un album qui en comporte au total un nombre N. Chaque jour, l'enfant achète une tablette de chocolat, dans laquelle il y a une image. On note X_n le nombre d'images distinctes dont dispose l'enfant au soir du jour n, avec la convention $X_0 = 0$. En supposant que les images sont équitablement réparties dans les tablettes de chocolat, il est raisonnable de penser que la suite $(X_n)_{n\geq 0}$ est une chaîne de Markov.

1. Préciser la matrice de transition de (X_n).
2. Pour $i \in \{1, \dots N\}$, on pose $T_i := \inf\{n \geq 1, X_n = i\}$. Que signifient concrètement les quantités T_i, $T_{i+1} - T_i$. Déterminer la loi de $T_{i+1} - T_i$. En déduire $\mathbb{E}[T_{i+1} - T_i]$ puis $\mathbb{E}[T_N]$.
3. Déterminer approximativement le nombre de tablettes de chocolat qu'un enfant devra manger s'il veut compléter son album de 100 images.

Exercice 8 : *Matrices bistochastiques et loi invariante*
On rappelle qu'une matrice carrée Q est dite bistochastique si Q et Q^t sont stochastiques.

1. Vérifier que si (X_n) est une chaîne de Markov ayant une telle matrice comme matrice de transition, alors la loi uniforme π est une loi stationnaire de cette chaîne, i.e. $\pi Q = \pi$.
2. Déterminer la matrice de transition de la suite $Z = (Z_n)$ de l'exercice 1, conclure.

Exercice 9 : *Urne d'Ehrenfest*
Le modèle de diffusion d'Ehrenfest est le suivant : des balles numérotées de 1 à d sont réparties dans 2 urnes, A et B. À chaque instant n, on tire uniformément au hasard un nombre i entre 1 et d et on change d'urne la balle numéro i. On désigne par X_n le nombre de balles dans l'urne A après n tirages indépendants. La suite $(X_n)_{n\geq 0}$ est une chaîne de Markov. Préciser l'ensemble de ses valeurs et sa matrice de transition.

Exercice 10 : *Bruit qui court*
Un message pouvant prendre deux formes (oui et non) est transmis à travers n intermédiaires. On suppose que chaque intermédiaire transmet le message de façon correcte avec une probabilité p telle que $0 < p < 1$ ou le déforme avec probabilité $1 - p$. Les intermédiaires sont indépendants.

1. Modéliser cette situation par une chaîne de Markov homogène à deux états.
2. Calculer la probabilité que l'informations transmise par le $n-$ième intermédiaires soit conforme à l'information initiale.
3. Est-ce que la réponse dépend du choix de la loi initiale ? Que se passe-t-il lorsque n tend vers l'infini.