Feuille d'exercices # 5

Exercice 1 : *Concentration sur 0 et 1*
Soit $(X_n)_{n\geq 0}$ une suite de variables aléatoires réelles. On pose $\mathcal{F}_n = \sigma(X_0, ..., X_n)$, $n \geq 0$. On suppose que $X_0 = a$ presque sûrement avec $a \in [0,1]$ et que pour $n \geq 0$,

$$\mathbb{P}\left(X_{n+1} = \frac{X_n}{2}\Big|\mathcal{F}_n\right) = 1 - X_n \quad \text{et} \quad \mathbb{P}\left(X_{n+1} = \frac{1+X_n}{2}\Big|\mathcal{F}_n\right) = X_n.$$

1. Montrer que, pour tout $n \geq 0$:

$$\mathbb{P}\left(X_{n+1} = \frac{X_n}{2} \text{ ou } X_{n+1} = \frac{1+X_n}{2}\right) = 1.$$

   En déduire que presque sûrement, pour tout $n \geq 0$, $X_n \in [0,1]$.
2. Montrer que $(X_n)_{n\geq 0}$ est une martingale qui converge presque sûrement et dans $\mathbb{L}^p$ pour tout $p \geq 1$ vers une variable aléatoire que l'on note X_∞.
3. Montrer que, pour tout $n \geq 0$:

$$\mathbb{E}[(X_{n+1} - X_n)^2] = \frac{1}{4}\mathbb{E}[X_n(1 - X_n)].$$

4. En déduire la valeur de $\mathbb{E}[X_\infty(1 - X_\infty)]$ puis la loi de X_∞.

Exercice 2 : *Martingales pour l'urne de Polya à deux couleurs*
On considère une urne dans laquelle se trouvent initialement deux boules, une blanche et une noire. On dispose par ailleurs d'un stock infini de boules noires et blanches. Partant de la configuration initiale, à chaque pas de temps, on tire au hasard une boule de l'urne et on la remet dans l'urne avec une boule de même couleur issue du stock. À l'instant n, il y a ainsi $n+2$ boules dans l'urne. On note N_n le nombre de boules noires dans l'urne à l'instant n et $X_n := N_n/(n+2)$ la proportion de boules noires.

1. Montrer que la suite $(X_n)_{n\geq 0}$ est une martingale bornée. En déduire X_n converge (en quel sens ?) vers une variable X_∞ telle que $0 \leq X_\infty \leq 1$.
2. Pour $k \geq 1$, on considère la nouvelle suite $(Z_n^{(k)})_{n\geq 0}$ de variables aléatoires :

$$Z_n^{(k)} := \frac{N_n(1+N_n)\dots(k-1+N_n)}{(1+n)\dots(k+n)}.$$

   Montrer que $(Z_n^{(k)})_{n\geq 0}$ est également une martingale bornée qui converge (en quel sens ?) vers $Z_\infty^{(k)} = X_\infty^k$ (la puissance $k-$ième de X_∞) et que $\mathbb{E}[Z_\infty^{(k)}] = 1/(k+1)$.
3. En déduire que la loi de Z_∞ est la loi uniforme sur $[0,1]$.

Exercice 3 : *Vers la loi du logarithme itéré*
Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées de loi normale $\mathcal{N}(0,1)$, toutes définies sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Pour $n \geq 1$, on pose $S_n := X_1 + \ldots + X_n$. Le but de l'exercice est de montrer que, presque sûrement, on a

$$\limsup_{n\to+\infty} \frac{S_n}{\sqrt{2n\log\log n}} \leq 1.$$

Pour simplifier les expressions, on pose $h(x) = \sqrt{2x\log\log x}$ pour $x \geq e$.

1. Montrer que pour tout $\theta, c > 0$, on a
$$\mathbb{P}(\max_{k=1\ldots n} S_k > c) \leq e^{-\theta c}\mathbb{E}[e^{\theta S_n}].$$
En déduire que $\mathbb{P}(\max_{k=1\ldots n} S_k > c) \leq e^{-\frac{c^2}{2n}}$.
2. Soient $1 < \kappa < K$. Pour tout entier r, on note n_r l'entier le plus proche de κ^r. À l'aide de la question précédente, majorer la probabilité $\mathbb{P}(B_r)$ où
$$B_r := \left\{ \max_{n_r \leq k \leq n_{r+1}} S_k > Kh(n_r) \right\}.$$
En déduire que $\limsup_{n\to+\infty} \frac{S_n}{h(n)} \leq K$ presque sûrement et conclure

Exercice 4 : *Ruine et grande fortune*
Soit $(S_n)_{n\geq 0}$ une marche aléatoire simple sur $\mathbb{Z}$: $S_0 := 0$, $S_n := X_1 + \ldots + X_n$ pour $n \geq 1$, où les variables X_i sont indépendantes et de même loi $0 < \mathbb{P}(X_i = 1) = p < 1$, $\mathbb{P}(X_i = -1) = 1 - p =: q$.

1. Pour $n \geq 0$, on pose $Z_n := (q/p)^{S_n}$. Montrer que $(Z_n)_{n\geq 0}$ est une martingale positive.
2. Montrer que pour $k > 0$,
$$\mathbb{P}(\sup_{n\geq 0} S_n \geq k) \leq \left(\frac{p}{q}\right)^k,$$
et que lorsque $q > p$:
$$\mathbb{E}\left[\sup_{n\geq 0} S_n\right] \leq \frac{q}{q-p}.$$

Exercice 5 : *Une série aléatoire*
Soient $(X_i)_{i\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées telles que $\mathbb{P}(X_1 = 1) = \mathbb{P}(X_1 = -1) = 1/2$ et $(\alpha_i)_{i\geq 1}$ une suite de réels. Montrer que si $\sum_{i\geq 1} \alpha_i^2 < \infty$ alors la série $\sum_{i\geq 1} \alpha_i X_i$ converge presque sûrement.

Exercice 6 : *Transformée de Lévy discrète*
Soit $(X_n)_{n\geq 0}$ une suite de variables indépendantes et de même loi $\mathbb{P}(X_i = 1) = \mathbb{P}(X_i = -1) = 1/2$. On pose $\mathcal{B}_0 := \{\emptyset, \Omega\}$, $\mathcal{B}_n := \sigma(X_1, \ldots, X_n)$ et $S_0 := 0$, $S_n := X_1 + \ldots + X_n$ pour $n \geq 1$. On considère la suite $(M_n)_{n\geq 0}$ définie par $M_0 := 0$ et pour $n \geq 1$:

$$M_n := \sum_{k=1}^{n} \text{signe}(S_{k-1})X_k.$$

1. Quel est le compensateur de la sous-martingale $(S_n^2)_{n\geq 0}$?
2. Montrer que $(M_n)_{n\geq 0}$ est une martingale et calculer le compensateur de $(M_n^2)_{n\geq 0}$.
3. Quelle est la décompositin de Doob de $(|S_n|)_{n\geq 0}$? En déduire que M_n est mesurable par rapport à la tribu $\sigma(|S_1|, \ldots, |S_n|)$