Feuille d'exercices # 4

Exercice 1 *Modèle de Wright-Fisher*
Soient k et N deux entiers tels que $0 < k < N$. On définit par récurrence une suite de variables $(X_n^N)_{n\geq 0}$ de la façon suivante : $X_0^N := k$ et pour pour tout $n \geq 0$ et $i \in \{0, \dots, N\}$, la loi de X_{n+1}^N sachant que $X_n^N = i$ est la loi binomiale $\mathcal{B}(N, i/N)$.

1. Montrer que la suite $(X_n^N)_{n\geq 0}$ est une martingale.
2. Montrer que lorsque n tend vers l'infini, $(X_n^N)_{n\geq 0}$ converge presque sûrement et dans $\mathbb{L}^p$ pour tout $p \geq 1$.
3. Décrire la loi de la variable limite X_∞^N.

Exercice 2 *Sur les arbres de Galton-Watson*
Soit $P = \sum_{n\geq 0} p_n \delta_n$ une loi de probabilité sur $\mathbb{N}$ et $(X_{n,k})_{n\geq 1, k\geq 1}$ une famille de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées de loi P. On définit par récurrence une suite $(Z_n)_{n\geq 0}$ telle que $Z_0 := 1$ et pour $n \geq 0$:

$$Z_{n+1} := \sum_{k=1}^{Z_n} X_{n+1,k}.$$

La suite Z_n représente le nombre d'individus à la génération n d'un arbre de Galton-Watson de loi de reproduction P. On adopte ici la convention $\sum_\varnothing = 0$ de sorte que si $Z_n = 0$ alors $Z_{n+1} = 0$. On désigne par $T := \inf\{n \geq 0,\, Z_n = 0\} \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$ le temps d'extinction de l'arbre.

1. Établir les points suivants :
   (a) Si $p_k = 1$ pour un $k \in \mathbb{N}$, i.e. $P = \delta_k$, alors $Z_{n+1} = kZ_n = \cdots = k^{n+1} Z_0$.
   (b) Si $p_0 = 0$ et $p_1 < 1$ alors $\mathbb{P}(Z_n \nearrow \infty) = 1$. Autrement dit, la taille de l'arbre tend vers l'infini avec n (comparer au jeu de pile ou face).
   (c) Si $p_0 + p_1 = 1$ alors $\mathbb{P}(Z_n \searrow 0) = 1$. Autrement dit, l'arbre s'éteint presque sûrement et la loi du temps d'extinction T est géométrique.

   Dans toute la suite, nous supposerons que :

   $$Z_0 = 1, \quad 0 < p_0 \leq p_0 + p_1 < 1, \quad p_k < 1 \text{ pour tout } k \in \mathbb{N}.$$

   On note $m := \mathbb{E}[Z_1]$ lorsque cette moyenne existe, et $\sigma^2 = \mathbb{E}[Z_1^2] - \mathbb{E}[Z_1]^2 \in \overline{\mathbb{R}}_+$.
2. Montrer que si $m < +\infty$, alors $\mathbb{E}(Z_n) = m^n$ pour tout $n \geq 0$ et si $\sigma^2 < \infty$ alors

   $$\operatorname{var}(Z_n) = m^n \sigma^2 \frac{m^n - 1}{m^2 - m}, \text{ prolongé en } n\sigma^2 \text{ si } m = 1.$$

   Le cas $m = 1$ est dit critique, les cas $m < 1$ et $m > 1$ sont respectivement dits sous-critique et sur-critique.
3. Montrer que la probabilité d'extinction vérifie $\mathbb{P}(T < +\infty) = \lim_{n\to+\infty} P(Z_n = 0)$.

4. Soit g la fonction génératrice de $X_{1,1} = Z_1$, i.e. $g(s) := \mathbb{E}[s^{Z_1}] = \sum_{m\geq 0} p^m s^m$, et soit g_n la fonction génératrice de Z_n, i.e. $g_n(s) = \mathbb{E}[s^{Z_n}]$. Montrer que l'on a la relation

$$g_n = \underbrace{g \circ g \circ \ldots \circ g}_{n \text{ fois}}.$$

5. Remarquer que $\mathbb{P}(Z_n = 0) = g_n(0)$ et en déduire d'une part que, si $m \leq 1$ alors l'extinction est presque sûre i.e. $\mathbb{P}(T < +\infty) = 1$, et d'autre part que si $m > 1$ alors $\mathbb{P}(T < +\infty)$ est l'unique racine dans $]0, 1[$ de l'équation de point fixe $g(s) = s$. Expliciter cette probabilité lorsque la loi de reproduction est une loi géométrique $\mathcal{G}(p)$.
6. Montrer que la suite $Y_n := Z_n/m^n$ est une martingale. En déduire que le comportement asymptotique de Z_n lorsque n tend vers l'infini.
7. On cherche maintenant à préciser ce comportement asymptotique dans les cas critique et sur-critique. On suppose tout d'abord que $m = 1$ et $\sigma < +\infty$. En faisant un développement de Taylor de la fonction g à l'ordre 2 en zéro, montrer que
   (a) $\lim_{n\to+\infty} n\mathbb{P}(Z_n > 0) = 2/\sigma^2$;
   (b) $\lim_{n\to+\infty} \mathbb{E}[Z_n/n|Z_n > 0] = \sigma^2/2$;
   (c) $\mathcal{L}(Z_n/n|Z_n > 0)$ tend lorsque n tend vers l'infini vers la loi exponentielle $\mathcal{E}(2/\sigma^2)$.
8. On suppose maintenant que $m > 1$ et $\sigma < +\infty$. Montrer que la martingale (Y_n) converge presque sûrement et dans $\mathbb{L}^2$ vers une variable positive Y_∞ qui vérifie :
   (a) $\mathbb{E}[Y_\infty] = 1$ et $\mathrm{var}(Y_\infty) = \sigma^2/(m^2 - m)$;
   (b) $\phi'_\infty(0) = -1$, et $\phi_\infty(ms) = g(\phi_\infty(s))$, où l'on a posé $\phi_\infty(s) := \mathbb{E}[e^{-sY_\infty}]$.

Exercice 3 *Thunderbolt*
On peut se demander si les performances sportives seront toujours battues et si oui, à quel rythme. Afin de modéliser cette situation, on considère une suite (X_n) de variables aléatoires indépendantes et de même loi admettant une densité par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^+$. Pour tout entier $n \geq 1$ fixé, on note $(X_{(1)}, \ldots, X_{(n)})$ le vecteur composé des variables X_i réordonnées, c'est-à-dire $X_{(1)} < X_{(2)} < \ldots < X_{(n)}$, et on note R_n le rang relatif de X_n. Il est clair que R_n est une variable aléatoire à valeurs dans $\{1, 2, \ldots, n\}$. Pour $n \geq 1$, on dit qu'il se produit un record à l'instant n si $R_n = 1$. On s'intéresse au comportement asymptotique des suites (Z_n) et (M_n) données par

$$Z_n := \sum_{k=1}^{n} \mathbb{1}_{R_k=1}, \qquad M_n := Z_n - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

La suite (Z_n) compte le nombre de records qui se produisent avant l'instant n.

1. Montrer que les variables aléatoires $R_1, \ldots, R_n$ sont indépendantes et que pour $1 \leq k \leq n$:

$$\mathbb{P}(R_n = k) = \frac{1}{n}.$$

2. Calculer, pour tout $n \geq 1$, l'espérance et la variance de Z_n.
3. Montrer que (M_n) est une martingale de carré intégrable et calculer son compensateur $\langle M \rangle_n$.
4. En déduire les convergences

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{M_n}{\log(n)} = 0 \ \ p.s., \qquad \frac{M_n}{\sqrt{\log(n)}} \xrightarrow{loi} \mathcal{N}(0, 1), \qquad \frac{Z_n - \log(n)}{\sqrt{\log(n)}} \xrightarrow{loi} \mathcal{N}(0, 1).$$