Feuille d'exercices # 3

Exercice 1 : *Martingale et suite récurrente I*
Soient a un réel et $(U_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de loi uniforme sur $[0,1]$. On pose $X_0 := a$ et on définit par récurrence $X_{n+1} := U_{n+1} + (1-U_{n+1})X_n^2$ pour $n \geq 0$. On note $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$ la filtration naturelle associée à la suite $(X_n)_{n\geq 0}$.

1. Montrer que la suite $(X_n)_{n\geq 0}$ est une sous-martingale relativement à $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$.
2. On suppose maintenant que $a \in [0,1]$. Montrer que lorsque n tend vers l'infini, la suite $(X_n)_{n\geq 0}$ converge presque sûrement vers une variable X_∞ que l'on précisera.

Exercice 2 : *Martingale et suite récurrente II*
Soient $a \in [0, \pi/2]$ et $(U_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de loi uniforme sur $[0,1]$. On pose $X_0 := a$ et on définit par récurrence $X_{n+1} := U_{n+1}\sin(X_n)$ pour $n \geq 0$. On note $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$ la filtration naturelle associée à la suite $(X_n)_{n\geq 0}$. Montrer que $(X_n)_{n\geq 0}$ prend des valeurs positives, puis que la suite $(2^n X_n)_{n\geq 0}$ est une surmartingale relativement à $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$.

Exercice 3 : *Une martingale qui converge en probabilité mais pas presque sûrement*
Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables indépendantes vérifiant $\mathbb{P}(X_n = 1) = \mathbb{P}(X_n = -1) = 1/2n$ et $\mathbb{P}(X_n = 0) = 1 - 1/n$. On note $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 1}$ la filtration naturelle associée. On définit une nouvelle suite de variables aléatoires $(Y_n)_{n\geq 1}$ en posant $Y_1 := X_1$, et pour $n \geq 2$:

$$Y_n := \begin{cases} X_n & \text{si } Y_{n-1} = 0, \\ n|X_n|Y_{n-1} & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. Montrer que $(Y_n)_{n\geq 1}$ est une martingale pour la filtration $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 1}$.
2. Montrer que $(Y_n)_{n\geq 1}$ converge vers 0 en probabilité.
3. Montrer à l'aide du lemme de Borel-Cantelli que $(Y_n)_{n\geq 1}$ ne converge pas presque sûrement. Quelle hypothèse fait défaut pour l'application du théorème de convergence presque sûre ?

Exercice 4 : *Un exemple de martingale qui converge p.s. vers $+\infty$*
Soit $(X_n)_{n\geq 2}$ une suite de variables indépendantes telles que

$$\mathbb{P}(X_n = -n^2) = \frac{1}{n^2} \quad \text{et} \quad \mathbb{P}\left(X_n = \frac{n^2}{n^2-1}\right) = 1 - \frac{1}{n^2}.$$

On pose $S_n := X_2 + ... + X_n$ pour $n \geq 2$. Montrer que $(S_n)_{n\geq 2}$ est une martingale relativement à la filtration engendrée par les $(X_n)_{n\geq 2}$ et qu'elle converge p.s. vers $+\infty$.

Exercice 5 : *Un exemple de martingale non bornée dans $\mathbb{L}^1$*
Soit $(X_i)_{i\geq 1}$ une suite de variables i.i.d. telles que $\mathbb{P}(X_1 = 1) = \mathbb{P}(X_1 = -1) = 1/2$. On pose $S_n := X_1 + ... + X_n$ pour $n \geq 1$ et $S_0 = 0$. Montrer que $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une martingale relativement à la filtration engendrée par les $(X_i)_{i\geq 1}$ et qu'il existe une constante $c > 0$ telle que pour n assez grand, on ait $\mathbb{E}[|S_n|] \geq c\sqrt{n}$.

Exercice 6 : *Un exemple de martingale qui converge p.s. mais qui n'est pas bornée dans* $\mathbb{L}^1$
Soit $(X_i)_{i\geq 1}$ une suite de variables i.i.d. telles que $\mathbb{P}(X_1 = 1) = \mathbb{P}(X_1 = -1) = 1/2$. Soit T une variable indépendante des $(X_i)_{i\geq 1}$ telle que $\mathbb{P}(T = n) = C/n^\alpha$ pour $n \geq 1$ avec $\alpha > 1$ et $C = (\sum_{n\geq 1} n^{-\alpha})^{-1}$. On pose

$$S_n := \sum_{k=1}^{n\wedge T} X_k, \quad n \geq 1.$$

Montrer que S_n est une martingale relativement à la filtration $\mathcal{F}_n := \sigma(T, X_1, ..., X_n)$, $n \geq 1$, qu'elle converge p.s., mais que pour α bien choisi, elle n'est pas bornée dans $\mathbb{L}^1$.
Indice : pour le dernier point, on pourra se servir de l'exercice 5.

Exercice 7 : *Loi du zéro un de Kolmogorov via les martingales*
Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes. On définit :

$$\begin{aligned} &\mathcal{F}_n := \sigma(X_1, \dots, X_n), \quad &\mathcal{F}_\infty := \sigma\left(\textstyle\bigcup_{n\geq 1} \mathcal{F}_n\right), \\ &\mathcal{F}^n := \sigma(X_n, X_{n+1}, \dots), \quad &\mathcal{F}^\infty := \textstyle\bigcap_{n\geq 1} \mathcal{F}^n. \end{aligned}$$

Soit A un évènement asymptotique, i.e. $A \in \mathcal{F}^\infty$. En utilisant la martingale fermée $(M_n)_{n\geq 1}$ définie par $M_n := \mathbb{E}[\mathbb{1}_A|\mathcal{F}_n]$, montrer que $\mathbb{P}(A) = 0$ ou $\mathbb{P}(A) = 1$.

Exercice 8 : *Fonctions intégrables et fonctions étagées*
Soit f une fonction mesurable et intégrable par rapport à la mesure de Lebesgue λ sur $[0, 1]$. On souhaite retrouver le résultat suivant : il existe une suite $(f_n)_{n\geq 0}$ de fonctions étagées qui converge presque sûrement et dans $\mathbb{L}^1([0, 1], d\lambda)$ vers f. Soient X une variable aléatoire de loi uniforme sur $[0, 1]$ et pour tout entier naturel n : $X_n := 2^{-n}\lfloor 2^n X\rfloor$. On pose $Y := f(X)$ et $Y_n := \mathbb{E}[Y|\mathcal{F}_n]$ où $\mathcal{F}_n := \sigma(X_0, X_1, \dots, X_n)$.

1. Montrer que X_n converge vers X. Quelle signification donner à $2^n(X_n - X_{n-1})$?
2. Montrer que Y_n converge presque sûrement et dans $\mathbb{L}^1$. Identifier sa limite.
3. Expliciter Y_n et conclure.

Exercice 9 : *Théorème de Rademacher sur les fonctions lipschitziennes*
Soient $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité, X une variable aléatoire de loi uniforme sur $[0, 1]$ et $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ une fonction lipschitzienne de constante de Lipschitz $L > 0$. Pour tout $n \geq 0$, on pose $X_n := 2^{-n}\lfloor 2^n X\rfloor$ et $Z_n := 2^n\left(f(X_n + 2^{-n}) - f(X_n)\right)$.

1. Pour $n \geq 1$, montrer les égalités de tribus suivantes :
$$\mathcal{F}_n := \sigma(X_0, X_1, \dots, X_n) = \sigma(X_n), \qquad \bigcap_{n\geq 0} \sigma(X_n, X_{n+1}, \dots) = \sigma(X).$$
2. Déterminer $\mathbb{E}[h(X_{n+1})|X_n]$ pour toute fonction $h : [0, 1] \to \mathbb{R}$ mesurable continue. En déduire que $(Z_n)_{n\geq 0}$ est une martingale bornée relativement à $(\mathcal{F}_n)$.
3. Montrer qu'il existe une variable aléatoire Z, limite p.s. et dans $\mathbb{L}^1$ de $(Z_n)_{n\geq 0}$, puis qu'il existe une fonction $g : [0, 1] \to \mathbb{R}$ borélienne bornée telle que $Z = g(X)$.
4. Calculer $\mathbb{E}[h(X)|X_n]$ pour toute fonction $h : [0, 1] \to \mathbb{R}$ mesurable bornée. En déduire que presque sûrement :
$$Z_n = 2^n \int_{X_n}^{X_n+2^{-n}} g(u)du.$$
5. Conclure que pour tout $x \in [0, 1]$, $f(x) = f(0) + \int_0^x g(u)du$.