Feuille d'exercices # 2

Exercice 1 *Hyperplan dans l'hypercube*
Soient $X_1, \ldots, X_n$ des variables indépendantes et de même loi de Bernoulli $\mathcal{B}(p)$ i.e. $\mathbb{P}(X_i = 1) = p$ et $\mathbb{P}(X_i = 0) = 1 - p$ avec $0 < p < 1$. On note $X = (X_1, \ldots X_n)$ le point aléatoire correspondant dans l'hypercube $\{0,1\}^n$ et on pose $S_n := \sum_{i=1}^n X_i$ la somme des coordonnées. Montrer que la loi de X sachant $\{S_n = \ell\}$ est la loi uniforme sur l'hyperplan $\{(k_1, \ldots, k_n) \in \{0,1\}^n, \ \sum_{i=1}^n k_i = \ell\}$.

Exercice 2 *Loi uniforme dans un triangle*
Soit (U, V) un couple de variables aléatoires admettant la densité suivante par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^2$ (un dessin peut aider) :

$$f(u,v) = \begin{cases} 2 & \text{si} \quad 0 \leq u \leq v \leq 1, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. Déterminer les lois conditionnelles de U sachant $V = v$ et de V sachant $U = u$.
2. En déduire les espérances conditionnelles $\mathbb{E}[U|V]$ puis $\mathbb{E}[V|U]$.

Exercice 3 *Autour de la notion de martingale*

1. Soit $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$ une filtration (suite croissante de tribus) d'un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. La réunion $\bigcup_{n\geq 0} \mathcal{F}_n$ est-elle toujours une tribu ?
2. Que dire d'une martingale (resp. d'une sous-martingale, d'une surmartingale) par rapport une filtration constante ?
3. Soit $(M_n)_{n\geq 0}$ une martingale par rapport à une filtration $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$. Pour $n \geq 0$, on note $\mathcal{G}_n = \sigma(M_0, \ldots, M_n)$ la filtration canonique associée à la martingale $(M_n)_{n\geq 0}$. Montrer que la suite $(M_n)_{n\geq 0}$ est une martingale pour la filtration $(\mathcal{G}_n)_{n\geq 0}$.
4. Trouver une suite de variables aléatoires $(M_n)_{n\geq 0}$ avec $\mathbb{E}[|M_n|] < +\infty$ pour tout n et telle que $\mathbb{E}[M_{n+1}|M_n] = M_n$ sans pour autant que $(M_n)_{n\geq 0}$ soit une martingale.

Exercice 4 *Martingale identiquement distribuée*
Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une sous-martingale telle que les variables X_n ont toutes même loi.

1. Montrer que la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est en fait une martingale, ainsi que $(X_n \vee a)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(X_n \wedge a)_{n\in\mathbb{N}}$ où a est un réel fixé.
2. Soient $n > m$ deux entiers et a un réel. Montrer que sur l'ensemble $\{\omega, \ X_m(\omega) \geq a\}$, on a $X_n \geq a$ presque sûrement. En déduire que la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante presque sûrement.

Exercice 5 *Urne de Pólya*
On dispose (d'une infinité) de boules rouges et vertes. À l'instant 0, une urne contient une boule de chaque couleur et on effectue une succession de tirages définis par la règle suivante : on tire une boule de l'urne uniformément au hasard et on la remet dans l'urne en ajoutant une boule du même couleur. Soit S_n le nombre de boules rouges au temps n, et $X_n := S_n/(n+2)$ la proportion de boules rouges au temps n. Montrer que la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une martingale par rapport à sa filtration naturelle $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et calculer $\mathbb{E}[X_n]$.

Exercice 6 *Martingale multiplicative*
Soient $Y_1, Y_2, \ldots$ des variables aléatoires positives indépendantes et identiquement distribuées et la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $X_0 = 1$ et $X_n := \prod_{i=1}^n Y_i$ pour $n \geq 1$.

1. Sous quelles conditions la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est-elle une surmartingale ? Une sous-martingale ? Une martingale ?
2. On se place dans le dernier cas et l'on suppose de plus que $\mathbb{P}(Y_1 = 1) < 1$ et qu'il existe $\delta > 0$ tel que $Y_n \geq \delta$. Montrer qu'alors $\mathbb{E}[\log Y_1] < 0$ et utiliser la loi des grands nombres pour $\log X_n/n$ pour montrer que $\lim_{n\to+\infty} X_n = 0$ presque sûrement.

Exercice 7 *Ruine du joueur et identité de Wald*
Soient a et b des entiers strictement positifs et $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées de loi $\mu := p\delta_1 + q\delta_{-1}$ où $0 < p, q < 1$ et $p + q = 1$. On pose $S_0 := 0$ et $S_n := X_1 + \ldots + X_n$ pour $n \geq 1$ et on désigne par $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 1}$ la filtration naturelle associée. On suppose dans un premier temps que $p \neq q$.

1. Montrer que les suites $W_n := S_n - (2p-1)n$ et $M_n = (q/p)^{S_n}$ issues de 0 et 1 respectivement sont des martingales par rapport $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 1}$.
2. Soit $T = \inf\{n \geq 0,\ S_n \notin]-a, b[\}$. Montrer que T est un temps d'arrêt fini presque sûrement.
3. En déduire les valeurs de $\mathbb{P}(S_T = -a)$, $\mathbb{P}(S_T = b)$ et $\mathbb{E}(T)$.

On suppose maintenant que $p = q = 1/2$, de sorte la suite $(S_n)_{n\geq 0}$ est une martingale.

4. Montrer que le temps T est toujours fini presque sûrement.
5. Montrer que $\mathbb{E}(S_T) = 0$ et en déduire les expressions de $\mathbb{P}(S_T = -a)$ et $\mathbb{P}(S_T = b)$.

On cherche enfin à expliciter $\mathbb{E}[T]$ dans le cas symétrique. Soit ϕ la transformée de Laplace de μ i.e. $\phi(\lambda) = \cosh(\lambda) = pe^{\lambda} + qe^{-\lambda}$ pour $\lambda \in \mathbb{R}$.

6. Pour $n \geq 0$, on pose $Y_n := e^{\lambda S_n}/\phi(\lambda)^n$. Montrer que $(Y_n)_{n\geq 0}$ est une martingale.
7. Montrer que $\mathbb{E}(e^{\lambda S_T}\phi(\lambda)^{-T}) = 1$.
8. Retrouver le fait que $\mathbb{E}(S_T) = 0$ à partir de la dernière égalité.
9. Pour $\alpha > 1$, calculer $\mathbb{E}[\alpha^{-T}\mathbb{1}_{S_T=-a}]$ et $\mathbb{E}[\alpha^{-T}\mathbb{1}_{S_T=b}]$. En déduire $\mathbb{E}(T|S_T)$ et $\mathbb{E}[T]$.

Exercice 8 *Un critère de finitude pour les temps d'arrêt*
Soit T un temps d'arrêt pour une filtration $(\mathcal{F}_n)_{\geq 0}$. On suppose qu'il existe $\varepsilon > 0$ et $N \geq 1$ un entier tels que pour tout $n \geq 0$, on a $\mathbb{P}(T \leq n + N|\mathcal{F}_n) > \varepsilon,\ p.s.$. Montrer que T est fini presque sûrement et que $\mathbb{E}[T] < +\infty$.

Exercice 9 *Une réciproque au théorème d'arrêt*
Soient $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité filtré et $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite adaptée de variables aléatoires intégrables. Montrer que, si l'on a $\mathbb{E}(X_\tau) = \mathbb{E}(X_0)$ pour tout temps d'arrêt borné τ, alors la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une martingale.

Exercice 10 *Autre version du théorème d'arrêt*
Soient $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une martingale définie sur un espace de probabilité filtré $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}, \mathbb{P})$ et T un temps d'arrêt vérifiant $\mathbb{P}(T < +\infty) = 1$, $\mathbb{E}(|X_T|) < +\infty$ et $\mathbb{E}(|X_n|\mathbb{1}_{T>n}) \to 0$ lorsque n tend vers l'infini.

1. Montrer que $\lim_{n\to+\infty} \mathbb{E}(|X_T|\mathbb{1}_{T>n}) = 0$.
2. Montrer que $\lim_{n\to+\infty} \mathbb{E}(|X_{T\wedge n} - X_T|) = 0$.
3. En déduire que $\mathbb{E}(X_T) = \mathbb{E}(X_0)$.