Feuille d'exercices # 1

Exercice 1 *Formule de Bayes*
Le quart d'une population est vacciné contre le choléra. Au cours d'une épidémie, on constate qu'il y a parmi les malades un vacciné pour 4 non-vaccinés, et qu'il y a un malade sur 12 parmi les vaccinés. Quelle est la probabilité qu'un non-vacciné tombe malade ?

Exercice 2 *Conditionnement poissonnien*
Soient $X_1, \ldots, X_n$ des variables indépendantes, où X_j suit une loi de Poisson paramètre λ_j.

1. Déterminer la loi de $X_1 + X_2$. En déduire la loi de $X_1 + \ldots + X_n$.
2. Déterminer les probabilités conditionnelles $\mathbb{P}(X_j = \ell \,|\, X_1 + \ldots + X_n = k)$.

Exercice 3 *Mesurabilité*
Soient X et Y deux variables aléatoires réelles définies sur le même espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Montrer que Y est $\sigma(X)-$mesurable si et seulement si il existe une fonction borélienne $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $Y = f(X)$. Indication : on pourra commencer en supposant Y étagée.

Exercice 4 *Singletons, tribu et conditionnement*
On considère l'espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) = (]0,1[, \mathcal{B}(]0,1[), \lambda)$ où λ désigne la mesure de Lebesgue. Soient X la variable aléatoire définie par $X(\omega) = \cos(\pi\omega)$ et $\mathcal{G}$ l'ensemble formé des éléments $A \subseteq]0,1[$, tels que A ou A^c est dénombrable.

1. Vérifier que $\mathcal{G}$ est une tribu. Quel est le lien entre $\mathcal{G}$ et les singletons de $]0,1[$?
2. Montrer que $\mathbb{E}[X|\mathcal{G}] = 0$ presque sûrement.

Exercice 5 *Variables positives et conditionnement*
Soient $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité, $\mathcal{G}$ une sous tribu de $\mathcal{F}$ et X une variable aléatoire réelle positive. Montrer que l'ensemble $\{\mathbb{E}(X|\mathcal{G}) > 0\}$ est le plus petit ensemble $\mathcal{G}-$mesurable (aux négligeables près) qui contient $\{X > 0\}$.

Exercice 6 *Inégalité de Cauchy–Schwarz conditionnelle*
Soient $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité, $\mathcal{G}$ une sous tribu de $\mathcal{F}$ et X, Y deux variables aléatoires réelles telles que $\mathbb{E}(X^2) < +\infty$ et $\mathbb{E}(Y^2) < +\infty$. En considérant le fait que $\mathbb{E}[(X+\theta Y)^2|\mathcal{G}] \geq 0 \, p.s.$ pour tout $\theta \in \mathbb{Q}$, établir l'inégalité $\mathbb{E}[XY|\mathcal{G}]^2 \leq \mathbb{E}[X^2|\mathcal{G}]\mathbb{E}[Y^2|\mathcal{G}]$ *p.s.*

Exercice 7 *Espérance conditionnelle par rapport à la somme*
Soient $X_1, ..., X_n$ des variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées. On définit $S_n := X_1 + ... + X_n$.

1. Montrer que $\mathbb{E}[X_1|S_n] = \mathbb{E}[X_i|S_n]$ pour tout $i \in \{1, ..., n\}$.
2. En déduire $\mathbb{E}[X_1|S_n]$.

Exercice 8 *Somme aléatoire de variables aléatoires*
Soient $(X_n)_{n\geq 0}$ une suite de variables aléatoires d'espérance commune $m = \mathbb{E}[X_1]$ et N une variable aléatoire indépendante de $(X_n)_{n\geq 0}$, de loi géométrique $\mathcal{G}(1/2)$. On pose $S_N := \sum_{i=1}^{N} X_i$. Calculer l'espérance conditionnelle $\mathbb{E}[S_N|N]$. En déduire $\mathbb{E}[S_N]$.

Exercice 9 *Calcul d'espérance conditionelle*
Calculer $\mathbb{E}[X|Y]$ lorsque la loi du couple de variables aléatoires réelles (X, Y) admet la densité f suivante par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^2$:

$$\begin{aligned}(i) \quad & f(x,y) = 4y(x-y)\exp(-(x+y))\mathbb{1}_{0\leq y\leq x}(x,y),\\ (ii) \quad & f(x,y) = \frac{1}{y}\exp(-\frac{x}{y} - y)\mathbb{1}_{]0,+\infty[^2}(x,y),\end{aligned}$$

Exercice 10 *Somme de variables exponentielles et conditionnement*
Soient $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes de même loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$. On note $T := X_1 + \ldots + X_n$. Calculer $\mathbb{E}(h(X_1)|T)$ pour toute fonction h borélienne positive. Que remarque-t-on lorsque $n = 2$?

Exercice 11 *Exemples de conditionnements gaussiens*
On considère un vecteur gaussien $[X, Y]'$ de moyenne $m = [1, -1]'$ et de matrice de covariance :

$$\Gamma = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

1. Écrire la densité du vecteur $[X, Y]'$. Quelle est la loi de X ? de Y ? de $X + Y$?
2. Déterminer l'espérance conditionnelle $\mathbb{E}[X|Y]$. Quelle est sa loi ?
3. Si (U, V) est un vecteur gaussien centré réduit, que vaut $\mathbb{E}[U|U + V]$? Retrouver le résultat géométriquement.

Exercice 12 *Conditionnement gaussien par un couple*
Soit $X = (X_1, X_2, X_3)'$ un vecteur gaussien centré de matrice de covariance

$$\Gamma := \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & 1 \\ -2 & 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

1. Le vecteur aléatoire X admet-il une densité ?
2. Déterminer $\mathbb{E}[X_1|X_2]$ et $\mathbb{E}[X_1|X_2, X_3]$.
3. Mêmes questions que ci-dessus lorsque

$$\Gamma := \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 1 & 9 & -3 \\ 2 & -3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Exercice 13 *Exemples de conditionnements discrets*

1. Soient X_1 et X_2 deux variables aléatoires indépendantes de lois binomiales de paramètres respectifs (n_1, p) et (n_2, p). Déterminer la loi de X_1 sachant $X_1 + X_2 = n$. Déterminer $\mathbb{E}(X_1|X_1 + X_2)$.
2. Soient $X_1, \ldots, X_p$ des variables indépendantes de loi de Poisson de paramètres respectifs $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$. Déterminer la loi de $(X_1, \ldots, X_p)$ sachant $X_1 + X_2 + \ldots + X_p = n$

Exercice 14 *Conditionnement par le maximum*
Soient $(X_1, \ldots, X_n)$ un $n-$échantillon de variables aléatoires réelles intégrables de densité commune $f(x)$ et $(X_{(1)}, \ldots, X_{(n)})$ sa version réordonnée i.e. $X_{(1)} \leq \ldots \leq X_{(n)}$ presque sûrement. Déterminer la loi conditionnelle de $X_{(1)}$ sachant $X_{(n)} = x_n$ et $\mathbb{E}[X_{(1)}|X_{(n)}]$. Particulariser au cas où les variables X_i sont uniformes sur $[0, 1]$.