Université de Rennes 1 — Master 1 Mathématique

Martingales et chaînes de Markov — année 2014-2015

Élèments de correction du contrôle continu # 2

Exercice 1 *Maximum d'une marche aléatoire simple*

Soit S_n une marche aléatoire simple et symétrique sur $\mathbb{Z}$ i.e. $S_0 = 0$ et $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$ pour $n \geq 1$ où les variables X_i sont indépendantes et identiquement distribuées de loi de Bernoulli $\mathcal{B}(\pm 1, 1/2)$. On note $M_n = \max\{S_k,\ 0 \leq k \leq n\}$ le maximum de la trajectoire jusqu'au temps n et $Y_n = M_n - S_n$ la différence entre ce maximum et la position courante.

1. Montrer que la suite $(Y_n)_{n\geq 0}$ est une chaîne de Markov.

   On remarque que la différence $M_{n+1} - M_n$ peut prendre uniquement deux valeurs, 0 ou 1, la valeur 1 étant prise si et seulement $M_{n+1} = S_{n+1}$ i.e. $Y_{n+1} = 0$ ou encore si et seulement si $M_n = S_n$ et $X_{n+1} = 1$. De manière équivalente, on a $M_{n+1} = M_n$ si et seulement si $M_n \neq S_n$ ou $X_{n+1} = -1$, c'est-à-dire si et seulement si $Y_n > 0$ ou $X_{n+1} = -1$. On en déduit que

$$\begin{aligned} Y_{n+1} &= Y_{n+1}\mathbb{1}_{Y_{n+1}>0} \\ &= (M_{n+1} - S_{n+1})\mathbb{1}_{M_{n+1}=M_n} \\ &= (M_n - S_n - X_{n+1})\mathbb{1}_{M_{n+1}=M_n} \\ &= (Y_n - X_{n+1})\mathbb{1}_{M_{n+1}=M_n} \\ &= (Y_n - X_{n+1})\mathbb{1}_{Y_n>0 \text{ ou } X_{n+1}=-1}. \end{aligned}$$

   Si l'on désigne par $f : \mathbb{N} \times \{-1, 1\} \to \mathbb{N}$ la fonction mesurable

$$f(y, x) := (y - x)\mathbb{1}_{y>0 \text{ ou } x=-1},$$

   on a $Y_{n+1} = f(Y_n, X_{n+1})$ où la suite $(X_n)_{n\geq 0}$ est i.i.d. indépendante de $Y_0 = 0$ et d'après le cours $(Y_n)_{n\geq 0}$ est bien une chaîne de Markov.

2. En déduire que la somme de deux chaînes de Markov n'est pas toujours une chaîne de Markov.

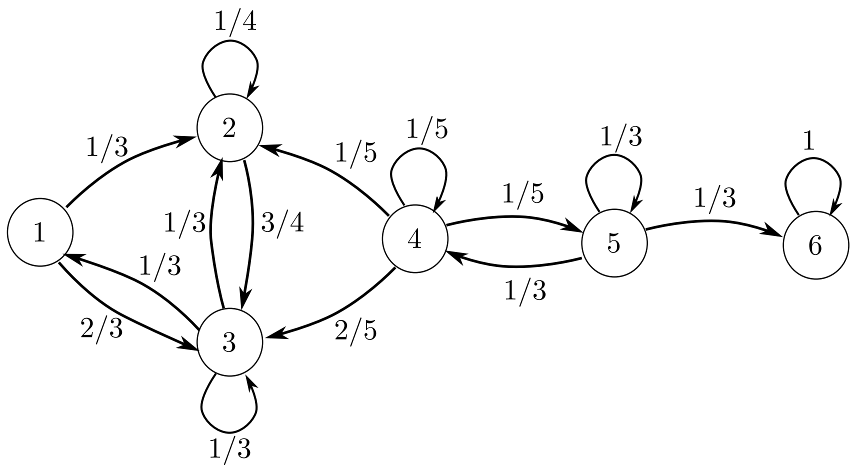
   Clairement, la suite $M_n = Y_n + S_n$ n'est pas une chaîne de Markov alors que les suites $(S_n)_{n\geq 0}$ et $(Y_n)_{n\geq 0}$ le sont.

Exercice 2 *Classification et probabilités d'absorption*

On considère une chaîne de Markov $(X_n)_{n\geq 0}$ à valeurs dans $E = \{1, 2, \ldots, 6\}$ et de matrice de transition

$$Q := \begin{pmatrix} 0 & 1/3 & 2/3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/4 & 3/4 & 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/5 & 2/5 & 1/5 & 1/5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Le graphe associé est le suivant :



1. Établir la classification des états de la chaîne, i.e. déterminer quels sont les états absorbants, transitoires, récurrents, et les classes de récurrence.
   L'état 6 est absorbant. Comme les états 4 et 5 mènent tous deux à 6, ils sont transitoires. En effet, on a par exemple $\mathbb{P}_5(T_5 = +\infty) \geq \mathbb{P}_5(X_1 = 6) = 1/3 > 0$ c'est-à-dire $\mathbb{P}_5(T_5 < +\infty) \leq 2/3 < 1$. Par ailleurs, les états 1, 2 et 3 communiquent entre eux puisque $\mathbb{P}_1(X_1 = 2, X_2 = 3, X_3 = 1) = Q(1,2)Q(2,3)Q(3,1) > 0$. Pour montrer que $\{1,2,3\}$ constitue une classe de récurrence, il reste à voir que l'un de ces états est récurrent. Considérons par exemple l'état 3 :
$$\begin{aligned}
\mathbb{P}_3(T_3 = +\infty) &= \mathbb{P}_3(X_n = 2, \forall n \geq 1) + \mathbb{P}_3(X_1 = 1, X_n = 2, \forall n \geq 2) \\
&\leq \mathbb{P}_3(X_n = 2, 1 \leq n \leq N) + \mathbb{P}_3(X_1 = 1, X_n = 2, 2 \leq n \leq N) \\
&= Q(3,2)Q(2,2)^{N-1} + Q(3,1)Q(1,2)Q(2,2)^{N-2} \\
&= \tfrac{1}{3} \times \left(\tfrac{1}{4}\right)^{N-1} + \tfrac{1}{3} \times \tfrac{1}{3} \times \left(\tfrac{1}{4}\right)^{N-2} \xrightarrow{N\to+\infty} 0.
\end{aligned}$$
   L'état 3 est bien récurrent, on a donc la partition :
$$E = E_T \sqcup E_{R_1} \sqcup E_{R_2}, \text{ avec } E_T = \{4,5\}, \ E_{R_1} = \{6\}, \ E_{R_2} = \{1,2,3\}.$$

2. Calculer les probabilités d'absorption dans les classes de récurrence.
   Calculons les probabilités m_i d'être absorbé dans la classe E_{R_1} en partant de l'état $i \in E$. On a naturellement $m_6 = 1$ et $m_1 = m_2 = m_3 = 0$ car les classes E_{R_1} et E_{R_2} ne communiquent pas entre elles. Par ailleurs, on a les relations :
$$\begin{aligned}
m_4 &= \tfrac{1}{5}m_2 + \tfrac{2}{5}m_3 + \tfrac{1}{5}m_4 + \tfrac{1}{5}m_5, \\
m_5 &= \tfrac{1}{3}m_4 + \tfrac{1}{3}m_5 + \tfrac{1}{3}m_6,
\end{aligned}$$

dont on déduit que $m_4 = 1/7$ et $m_5 = 4/7$. Puisqu'il y a exactement deux classes de récurrence, les probabilités n_i d'être absorbé dans la classe E_{R_2} en partant de l'état $i \in E$ sont alors données par $n_i = 1 - m_i$.

3. Pour chaque état transitoire $i \in E$, calculer le temps moyen d'absorption dans l'état absorbant pour la chaîne issue de i, sachant que celui-ci est fini.
   L'état absorbant est l'état 6, posons $S_6 := \inf\{n \geq 0,\ X_n = 6\}$ et $\tau_i := \mathbb{E}_i[S_6 \mathbb{1}_{S_6 < +\infty}]$. On a naturellement $\tau_6 = 0$ et $\tau_1 = \tau_2 = \tau_3 = 0$. Par ailleurs, on a les relations
$$\begin{aligned}\tau_4 &= m_4 + \tfrac{1}{5}\tau_2 + \tfrac{2}{5}\tau_3 + \tfrac{1}{5}\tau_4 + \tfrac{1}{5}\tau_5,\\ \tau_5 &= m_5 + \tfrac{1}{3}\tau_4 + \tfrac{1}{3}\tau_5 + \tfrac{1}{3}\tau_6,\end{aligned}$$
   dont on déduit $\tau_4 = 22/49$ et $\tau_5 = 53/49$. Finalement, on a
$$\mathbb{E}_4[S_6 | S_6 < +\infty] = \frac{\tau_4}{m_4} = \frac{22}{7}, \quad \mathbb{E}_5[S_6 | S_6 < +\infty] = \frac{\tau_5}{m_5} = \frac{53}{28}.$$

4. Déterminer les mesures invariantes de la chaîne.
   D'après le cours, les mesures invariantes sont de la forme
$$\alpha(\mu_1, \mu_2, \mu_3, 0, 0, 0) + \beta(0, 0, 0, 0, 0, 1),$$
   où α et β sont deux réels positifs (non tous nuls) et où $\mu = (\mu_1, \mu_2, \mu_3)$ est une mesure invariante de la sous-chaîne induite sur E_{R_2}. La relation d'invariance s'écrit :
$$(\mu_1, \mu_2, \mu_3) = (\mu_1, \mu_2, \mu_3)\begin{pmatrix} 0 & 1/3 & 2/3 \\ 0 & 1/4 & 3/4 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{pmatrix}$$
$$\Updownarrow$$
$$\begin{cases} \mu_1 &= \dfrac{\mu_3}{3}, \\ \mu_2 &= \dfrac{\mu_1}{3} + \dfrac{\mu_2}{4} + \dfrac{\mu_3}{3}, \\ \mu_3 &= \dfrac{2\mu_1}{3} + \dfrac{3\mu_2}{4} + \dfrac{\mu_3}{3}, \end{cases}$$
$$\Downarrow$$
$$\begin{cases} \mu_3 &= 3\mu_1, \\ \mu_2 &= \dfrac{16}{9}\mu_1. \end{cases}$$
   Autrement dit, les mesures invariantes de la chaîne sont de la forme
$$\alpha(1, 16/9, 3, 0, 0, 0) + \beta(0, 0, 0, 0, 0, 1),$$
   où α et β sont deux réels positifs (non tous nuls).