Éléments de correction du contrôle continu # 1

Exercice 1 *Espérance conditionnelle gaussienne*
Soit ${}^t(X, Y, Z)$ un vecteur gaussien centré de matrice de covariance

$$\Gamma := \begin{pmatrix} 4 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer $\mathbb{E}[X^3|X^2]$.
   La variable X est une gaussienne centrée de variance 4, on note f_X sa densité : c'est une fonction paire sur $\mathbb{R}$. D'après le cours, on sait qu'il existe une fonction mesurable φ telle que $\mathbb{E}[X^3|X^2] = \varphi(X^2)$ et il s'agit ici d'expliciter φ. Par définition de l'espérance conditionnelle, pour toute fonction g mesurable bornée, on a

   $$\mathbb{E}[X^3 g(X^2)] = \mathbb{E}[\varphi(X^2)g(X^2)].$$

   Dans le membre de gauche, l'intégrande est intégrable et impaire, on a donc

   $$\mathbb{E}[X^3 g(X^2)] = \int_{\mathbb{R}} x^3 g(x^2) f_X(x)dx = 0.$$

   Ainsi, la fonction $\varphi \equiv 0$ convient et on conclut par unicité de l'espérance conditionnelle que $\mathbb{E}[X^3|X^2] = 0$ p.s..
2. Déterminer la densité du couple (Y, Z) ainsi que sa fonction caractéristique.
   La couple (Y, Z) est un vecteur gaussien centré et il a pour matrice de covariance la matrice diagonale $\Gamma_{(Y,Z)} := \mathrm{diag}(2, 1)$ qui est inversible. On en déduit que (Y, Z) admet bien une densité $f_{(Y,Z)}$ par rapport à la mesure de Lebesgue dans $\mathbb{R}^2$ donnée par

   $$\begin{aligned} f_{(Y,Z)}(y, z) &= \frac{1}{2\pi} \times \frac{1}{\sqrt{\det(\Gamma_{(Y,Z)})}} \times \exp\left(-\frac{1}{2}(y, z)\Gamma_{(Y,Z)}^{-1}\,{}^t(y, z)\right) \\ &= \frac{1}{2\pi} \times \frac{1}{\sqrt{2}} \times \exp\left(-\frac{y^2/2 + z^2}{2}\right) \end{aligned}$$

   La fonction caractéristique $\psi_{(Y,Z)}$ est quant à elle donnée par

   $$\begin{aligned} \psi_{(Y,Z)}(y, z) &= \exp\left(-\frac{1}{2}(y, z)\Gamma^t_{(Y,Z)}(y, z)\right) \\ &= \exp\left(-\frac{2y^2 + z^2}{2}\right). \end{aligned}$$

3. Sans calcul, déterminer $\mathbb{E}[Y|Z]$ et $\mathbb{E}[(Y - \mathbb{E}[Y|Z])^2]$.
   On lit sur la matrice $\Gamma_{(Y,Z)}$ que la covariance entre Y et Z est nulle, les variables sont donc indépendantes et $\mathbb{E}[Y|Z] = \mathbb{E}[Y] = 0$ puis $\mathbb{E}[(Y - \mathbb{E}[Y|Z])^2] = \mathbb{E}[Y^2] = 2$.

4. Calculer $\mathbb{E}[X|(Y,Z)]$.
D'après le cours, on a

$$\mathbb{E}[X|(Y,Z)] = \Gamma_{X,(Y,Z)}\Gamma_{(Y,Z)}^{-1}{}^t(Y,Z) = (1,-1)\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}{}^t(Y,Z) = \frac{Y}{2} - Z.$$

Exercice 2 *Conditionnement par une filtration finie*
On considère l'espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ où $\Omega = [0,1]$, $\mathcal{F}$ est la tribu borélienne sur Ω et $\mathbb{P}$ est la mesure uniforme. On fixe $K > 1$ un entier et $\alpha > 0$ un réel. Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit

$$\mathcal{F}_n := \sigma\left(\left]\frac{j}{K^n}, \frac{j+1}{K^n}\right], \quad 0 \le j \le K^n - 1\right).$$

On considère enfin la suite de variables aléatoires $(X_n)_{n\ge 0}$ définie par

$$X_n := \begin{cases} \alpha^n & \text{si } 0 \le \omega \le K^{-n}, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. Montrer que la suite $(\mathcal{F}_n)$ est une filtration de l'espace $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.
À n fixé, les éléments de la tribu $\mathcal{F}_n$ sont exactement les unions finies d'atomes de la forme $]j/K^n, (j+1)/K^n]$ et par ailleurs tout atome $]j/K^n, (j+1)/K^n]$ de $\mathcal{F}_n$ s'écrit comme réunion d'atomes de $\mathcal{F}_{n+1}$

$$\left]\frac{j}{K^n}, \frac{j+1}{K^n}\right] = \bigcup_{i=Kj}^{K(j+1)-1} \left]\frac{i}{K^{n+1}}, \frac{i+1}{K^{n+1}}\right],$$

d'où la croissance des tribus avec n.

2. On rappelle que toute variable $Z : \Omega \to \mathbb{R}$ qui est $\mathcal{F}_n$−mesurable est de la forme

$$Z(\omega) = \sum_{j=0}^{K^n-1} \beta_j \mathbb{1}_{]\frac{j}{K^n}, \frac{j+1}{K^n}]}(\omega), \;\; \text{avec} \;\; \beta_j \in \mathbb{R} \;\; \text{pour} \;\; 0 \le j \le K^n - 1.$$

Montrer que $\mathbb{E}[X_{n+1}|\mathcal{F}_n] = \frac{\alpha^{n+1}}{K}\mathbb{1}_{X_n>0}$.
On revient à la définition de l'espérance conditionnelle : $\mathbb{E}[X_{n+1}|\mathcal{F}_n]$ est une variable $\mathcal{F}_n$−mesurable, elle est donc de la forme

$$\mathbb{E}[X_{n+1}|\mathcal{F}_n](\omega) = \sum_{j=0}^{K^n-1} \gamma_j \mathbb{1}_{]\frac{j}{K^n}, \frac{j+1}{K^n}]}(\omega), \;\; \text{avec} \;\; \gamma_j \in \mathbb{R} \;\; \text{pour} \;\; 0 \le j \le K^n - 1.$$

Par ailleurs pour toute variable $\mathcal{F}_n$−mesurable Z bornée comme ci-dessus, on doit avoir

$$\mathbb{E}[X_{n+1}Z] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[X_{n+1}|\mathcal{F}_n]Z]$$

c'est-à-dire

$$\mathbb{E}\left[X_{n+1}\left(\sum_{j=0}^{K^n-1} \beta_j \mathbb{1}_{]\frac{j}{K^n}, \frac{j+1}{K^n}]}\right)\right] = \mathbb{E}\left[\left(\sum_{j=0}^{K^n-1} \gamma_j \mathbb{1}_{]\frac{j}{K^n}, \frac{j+1}{K^n}]}\right)\left(\sum_{j=0}^{K^n-1} \beta_j \mathbb{1}_{]\frac{j}{K^n}, \frac{j+1}{K^n}]}\right)\right]$$

ou encore

$$\mathbb{E}\left[\alpha^{n+1}\mathbb{1}_{\left[0,\frac{1}{K^{n+1}}\right[}\left(\sum_{j=0}^{K^n-1}\beta_j\mathbb{1}_{\left]\frac{j}{K^n},\frac{j+1}{K^n}\right]}\right)\right]=\mathbb{E}\left[\left(\sum_{j=0}^{K^n-1}\gamma_j\mathbb{1}_{\left]\frac{j}{K^n},\frac{j+1}{K^n}\right]}\right)\left(\sum_{j=0}^{K^n-1}\beta_j\mathbb{1}_{\left]\frac{j}{K^n},\frac{j+1}{K^n}\right]}\right)\right]$$

i.e. pour tout vecteur $(\beta_0,\dots,\beta_{K^n-1})$:

$$\frac{\alpha^{n+1}\beta_0}{K^{n+1}}=\frac{1}{K^n}\sum_{j=0}^{K^n-1}\beta_j\gamma_j.$$

On en déduit que $\gamma_j=0$ si $j\geq 1$ et $\gamma_0=\frac{\alpha^{n+1}}{K}$, d'où le résultat. On aurait pu également déterminer $\mathbb{E}[X_{n+1}|\mathcal{F}_n]$ en utilisant le fait que c'est la variable $\mathcal{F}_n-$mesurable qui minimise la distance $\mathbb{L}^2$ à X_{n+1}. La distance s'écrit

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[(X_{n+1}-\mathbb{E}[X_{n+1}|\mathcal{F}_n])^2\right] &= \mathbb{E}\left[\left(\alpha^{n+1}\mathbb{1}_{\left[0,\frac{1}{K^{n+1}}\right[}-\sum_{j=0}^{K^n-1}\gamma_j\mathbb{1}_{\left]\frac{j}{K^n},\frac{j+1}{K^n}\right]}\right)^2\right]\\
&= \mathbb{E}\left[\left(\alpha^{n+1}\mathbb{1}_{\left[0,\frac{1}{K^{n+1}}\right[}-\gamma_0\mathbb{1}_{\left]0,\frac{1}{K^n}\right]}-\sum_{j=1}^{K^n-1}\gamma_j\mathbb{1}_{\left]\frac{j}{K^n},\frac{j+1}{K^n}\right]}\right)^2\right]\\
&= \mathbb{E}\left[\left((\alpha^{n+1}-\gamma_0)\mathbb{1}_{\left[0,\frac{1}{K^{n+1}}\right[}-\gamma_0\mathbb{1}_{\left]\frac{1}{K^{n+1}},\frac{1}{K^n}\right]}-\sum_{j=1}^{K^n-1}\gamma_j\mathbb{1}_{\left]\frac{j}{K^n},\frac{j+1}{K^n}\right]}\right)^2\right]\\
&= \mathbb{E}\left[(\alpha^{n+1}-\gamma_0)^2\mathbb{1}_{\left[0,\frac{1}{K^{n+1}}\right[}+\gamma_0^2\mathbb{1}_{\left]\frac{1}{K^{n+1}},\frac{1}{K^n}\right]}+\sum_{j=1}^{K^n-1}\gamma_j^2\mathbb{1}_{\left]\frac{j}{K^n},\frac{j+1}{K^n}\right]}\right]\\
&= \frac{(\alpha^{n+1}-\gamma_0)^2}{K^{n+1}}+\gamma_0^2\left(\frac{1}{K^n}-\frac{1}{K^{n+1}}\right)+\frac{1}{K^n}\sum_{j=1}^{K^n-1}\gamma_j^2.
\end{aligned}$$

Il s'agit maintenant de miniser l'expression en les γ_j pour j de 0 à K^n-1. Clairement, on peut choisir $\gamma_j=0$ pour $j\geq 1$. Reste enfin à minimiser en γ_0. Calculons la dérivée en γ_0 :

$$\frac{\partial}{\partial\gamma_0}\mathbb{E}\left[(X_{n+1}-\mathbb{E}[X_{n+1}|\mathcal{F}_n])^2\right]=-\frac{2(\alpha^{n+1}-\gamma_0)}{K^{n+1}}+2\gamma_0\left(\frac{1}{K^n}-\frac{1}{K^{n+1}}\right)$$

Cette dernière s'annule si et seulement si

$$\frac{(\alpha^{n+1}-\gamma_0)}{K^{n+1}}=\gamma_0\left(\frac{1}{K^n}-\frac{1}{K^{n+1}}\right)$$

autrement dit

$$\gamma_0=\frac{\alpha^{n+1}}{K},$$

et cette valeur correspond bien à un minimum de la distance $\mathbb{L}^2$, d'où le résultat.

3. Pour quelles valeurs de α la suite (X_n) est-elle une martingale par rapport à $(\mathcal{F}_n)$? Une sous-martingale ? Une sur-martingale ?
Le calcul précédent montre que

$$\mathbb{E}[X_{n+1}|\mathcal{F}_n] = \left(\frac{\alpha}{K}\right)\alpha^n \mathbb{1}_{X_n>0} = \left(\frac{\alpha}{K}\right)X_n.$$

La suite (X_n) est donc une martingale si et seulement si $\alpha = K$ et c'est une sous-martingale si $\alpha \geq K$ et une sur martingale si $\alpha \leq K$.

4. Déterminer la limite presque sure de X_n lorsque n tend vers l'infini.
La suite (X_n) est une (sous/sur-)martingale positive, elle converge donc presque sûrement vers une limite X_∞. Si $\omega \in]0,1]$, il existe un entier n_0 tel que $\omega > K^{-n}$ pour $n \geq n_0$, auquel cas $X_n(\omega) = 0$ de sorte que $X_\infty(\omega) = 0$. Presque sûrement, la limite X_∞ est nulle.

5. La convergence a-t-elle lieu dans $\mathbb{L}^1$? Dans $\mathbb{L}^p$ pour $p > 1$?
Remarquons tout d'abord que si $\alpha \leq 1$, la suite positive X_n est bornée par 1, elle converge donc dans tous les $\mathbb{L}^p$ avec $p \geq 1$. Supposons maintenant que $\alpha > 1$ et fixons $p \geq 1$. Comme la suite (X_n) est positive et converge presque sûrement, elle converge dans $\mathbb{L}^p$ si et seulement si la suite (X_n^p) est uniformément intégrable. Par définition de la suite (X_n), on a

$$\mathbb{E}\left[|X_n|^p \mathbb{1}_{|X_n|^p>N}\right] = \alpha^{np}\mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{|X_n|^p>N}\right] = \alpha^{np}\mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{|X_n|^p>0 \text{ et } \alpha^{np}>N}\right]$$

donc

$$\mathbb{E}\left[|X_n|^p \mathbb{1}_{|X_n|^p>N}\right] = \begin{cases} \left(\dfrac{\alpha^p}{K}\right)^n & \text{si } \alpha^{np} > N, \text{ i.e. si } n > \frac{\log(N)}{\log(\alpha^p)}, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Si $\alpha^p \geq K$, on a alors

$$\sup_{n\geq 0} \mathbb{E}\left[|X_n|^p \mathbb{1}_{|X_n|^p>N}\right] \geq \left(\frac{\alpha^p}{K}\right)^{\frac{\log(N)}{\log(\alpha^p)}} \xrightarrow{N\to+\infty} +\infty,$$

et la suite $(X_n)^p$ n'est donc pas uniformément intégrable. En revanche, si $\alpha^p < K$, on a

$$\sup_{n\geq 0} \mathbb{E}\left[|X_n|^p \mathbb{1}_{|X_n|^p>N}\right] \leq \left(\frac{\alpha^p}{K}\right)^{\frac{\log(N)}{\log(\alpha^p)}} \xrightarrow{N\to+\infty} 0,$$

et la suite est bien uniformément intégrable.