Université de Rennes 1 — Master 1 Mathématique

Martingales et chaînes de Markov — année 2014-2015

Éléments de correction de la feuille de révision

Exercice 1 *Sur les espérances et les loi conditionnelles*

1. Soit (X, Y) un vecteur gaussien centré de covariance $\Gamma := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. Calculer $\mathbb{E}(X|Y)$ et donner la loi conditionnelle $\mathcal{L}(X|Y = y)$.
Solution : D'après le cours, $\mathbb{E}(X|Y) = \alpha Y$ avec $\alpha = \mathbb{E}[XY]/\mathbb{E}[Y^2] = 1/2$. Toujours d'après le cours, le vecteur (X, Y) admet la densité suivante par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^2$:
$$f_{(X,Y)}(x, y) = \frac{1}{2\pi\sqrt{\det(\Gamma)}} \exp\left(-\frac{1}{2}(x, y)\Gamma^{-1}(x, y)^*\right).$$
La densité $f_{(X|Y=y)}$ de la loi conditionnelle $\mathcal{L}(X|Y = y)$ est alors obtenue par la formule usuelle :
$$f_{(X|Y=y)}(x) = \frac{f_{(X,Y)}(x, y)}{\int_X f_{(X,Y)}(x, y)dx}$$
Remarque : de façon plus générale, si X est un vecteur gaussien de moyenne $m \in \mathbb{R}^d$ et de matrice de covariance $\Gamma \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R})$, alors la densité f_X du vecteur X par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^d$ est :
$$f_X(x) = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}\sqrt{\det(\Gamma)}} \exp\left(-\frac{1}{2}((x - m)^*\Gamma^{-1}(x - m)\right),$$
où x est un vecteur colonne dans $\mathbb{R}^d$. La fonction caractéristique $\phi_X(u)$ est quant à elle donnée par :
$$\phi_X(u) := \mathbb{E}[e^{i\langle u,X\rangle}] = \exp\left(i\langle u, m\rangle - \frac{1}{2}u^*\Gamma u\right).$$
où u est également un vecteur colonne dans $\mathbb{R}^d$.

2. Soient X et Y deux variables aléatoires de carré intégrable telles que $\mathbb{E}(X|Y) = Y$ et $\mathbb{E}(Y|X) = X$ presque sûrement. Montrer que $X = Y$ presque sûrement.
Solution : À partir des égalités presque sûres $\mathbb{E}(X|Y) = Y$ et $\mathbb{E}(Y|X) = X$, on obtient facilement que $\mathbb{E}(X^2) = \mathbb{E}(Y^2) = \mathbb{E}(XY)$. Dès lors, on a
$$\mathbb{E}[(X - Y)^2] = \mathbb{E}[X^2] + \mathbb{E}(Y^2) - 2\mathbb{E}(XY) = 0$$
d'où le résultat.

3. Soient $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires réelles indépendantes de même densité f continue, d'espérance finie et soit $X_{(1)} < \dots < X_{(n)}$ leur statistique d'ordre. Déterminer la loi de X_1 sachant $X_{(n)}$ en fonction de la densité f et fonction de répartition $F(x) = \int_{-\infty}^x f(u)du$.
Solution : Deux cas peuvent se produire, soit $X_1 = X_{(n)}$ ce qui arrive avec proba $1/n$, soit $X_1 < X_{(n)}$ ce qui arrive avec proba $1 - 1/n$. Dans le second cas, la loi de X_1 est simplement la loi initiale conditionnée à être dans l'intervalle $]-\infty, X_{(n)}]$. Au final, la loi $\mathcal{L}(X_1|X_{(n)})$ s'écrit donc :
$$\mathcal{L}(X_1|X_{(n)})(u) = \frac{1}{n}\delta_{X_{(n)}}(u) + \left(1 - \frac{1}{n}\right)\frac{f(u)\mathbb{1}_{]-\infty,X_{(n)}]}}{F(X_{(n)})}.$$

Exercice 2 *Identités de martingales de carré intégrable*
Soient $(X_n)_{n\geq 0}$ et $(Y_n)_{n\geq 0}$ deux $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$ martingales de carré intégrable. Démontrer les assertions suivantes :

1. Pour $m \leq n$, $\mathbb{E}[X_n Y_m | \mathcal{F}_m] = X_m Y_m$ presque sûrement ;
   Solution : $\mathbb{E}[X_n Y_m | \mathcal{F}_m] = Y_m \mathbb{E}[X_n | \mathcal{F}_m] = Y_m X_m$ presque sûrement. En particulier, en prenant l'espérance, on obtient
   $$\mathbb{E}[X_n Y_m] = \mathbb{E}[X_m Y_m].$$
2. $\mathbb{E}[X_n Y_n] - \mathbb{E}[X_0 Y_0] = \sum_{k=1}^n \mathbb{E}[(X_k - X_{k-1})(Y_k - Y_{k-1})]$;
   Solution : On développe le terme de droite et on utilise la question précédente :
   $$\begin{aligned}\sum_{k=1}^n \mathbb{E}[(X_k - X_{k-1})(Y_k - Y_{k-1})] &= \sum_{k=1}^n \mathbb{E}[X_k Y_k] + \sum_{k=1}^n \mathbb{E}[X_{k-1} Y_{k-1}] \\ &\quad - \sum_{k=1}^n \mathbb{E}[X_k Y_{k-1}] - \sum_{k=1}^n \mathbb{E}[X_{k-1} Y_k] \\ &= \sum_{k=1}^n \mathbb{E}[X_k Y_k] - \sum_{k=1}^n \mathbb{E}[X_{k-1} Y_{k-1}] \\ &= \mathbb{E}[X_n Y_n] - \mathbb{E}[X_0 Y_0]\end{aligned}$$
3. $\mathrm{Var}(X_n) = \mathrm{Var}(X_0) + \sum_{k=1}^n \mathrm{Var}(X_k - X_{k-1})$;
   Solution : C'est le théorème de Pythagore, en vertu de la question suivante.
4. Les variables aléatoires X_0, $(X_k - X_{k-1})$, $k \geq 1$, sont deux à deux orthogonales dans $\mathbb{L}^2$.
   Solution : Voir le cours.

Exercice 3 *Différence de martingale*
Soit $(M_n)_{n\geq 0}$ une martingale réelle telle que pour tout $n \geq 0$, $|M_n| \leq K$. On pose
$$X_n := \sum_{k=1}^n \frac{(M_k - M_{k-1})}{k}, \quad n \geq 0.$$
Montrer que $(X_n)_{n\geq 0}$ est une martingale qui converge presque sûrement et dans $\mathbb{L}^2$.
Solution : On vérifie aisément que (X_n) est une martingale de carré intégrable. D'après la dernière question de l'exercice précédent, on a alors
$$\mathbb{E}[X_n^2] = \sum_{k=1}^n \frac{\mathbb{E}[(M_k - M_{k-1})^2]}{k^2} \leq 4K^2 \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} \leq 4K^2 \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}.$$
En particulier $\sup_{n\geq 1} \mathbb{E}[X_n^2] < +\infty$ i.e. la suite (X_n) est bornée dans $\mathbb{L}^2$, et d'après le cours elle converge presque sûrement et dans $\mathbb{L}^2$

Exercice 4 *Une martingale exponentielle*
Soit $(Y_n)_{n\geq 0}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées de loi normale $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$. On pose $\mathcal{F}_n := \sigma(Y_1, ..., Y_n)$ et $X_n := Y_1 + ... + Y_n$ pour $n \geq 0$. Enfin, pour $u \in \mathbb{R}$ et $n \geq 0$, on pose
$$Z_n^u := \exp(uX_n - nu^2\sigma^2/2).$$
Montrer que Z_n^u est une martingale et qu'elle converge presque sûrement. Identifier la limite.
Solution : On vérifie aisément que la suite Z_n^u est adaptée et intégrable. Par ailleurs
$$\mathbb{E}[Z_{n+1}^u | \mathcal{F}_n] = Z_n^u \times \mathbb{E}[e^{uY_{n+1} - u^2\sigma^2/2}] = Z_n^u, \text{ car } \mathbb{E}[e^{uY_1}] = e^{u^2\sigma^2/2}.$$

La suite (Z_n^u) est donc une martingale positive et d'après le cours, elle converge presque sûrement. D'après la loi forte des grands nombres, on sait que $X_n/n = o(1)$ presque sûrement, on en déduit que si $u \neq 0$, presque sûrement lorsque n tend vers l'infini :

$$Z_n^u = e^{uX_n - nu^2\sigma^2/2} = e^{n\times(uX_n/n - u^2\sigma^2/2)} = e^{-n(u^2\sigma^2/2+o(1))} \longrightarrow 0.$$

Exercice 5 *Martingale produit*
Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et de même loi $\mu = 1/2(\delta_0 + \delta_2)$. On pose $Y_n := X_1 \times \ldots \times X_n$.

1. La suite $(Y_n)_{n\geq 1}$ est-elle une martingale ?
   Solution : Oui car les X_i sont indépendantes et $\mathbb{E}[X_1] = 1$.
2. La suite $(Y_n)_{n\geq 1}$ est-elle bornée dans $\mathbb{L}^1$?
   Solution : On remarque que Y_n ne prend que 2 valeurs, 0 si l'un des X_i est nul, ou 2^n si tous les X_i sont non nuls. On a donc $\mathbb{P}(Y_n = 2^n) = \mathbb{P}(\forall i \in \{1,\ldots,n\},\, X_i = 2) = 2^{-n}$ et $\mathbb{P}(Y_n = 0) = 1 - 2^{-n}$. On en déduit que $\mathbb{E}[Y_n] = 2^n\mathbb{P}(Y_n = 2^n) = 1$, et la suite (positive) est bien bornée dans $\mathbb{L}^1$.
3. La suite $(Y_n)_{n\geq 1}$ converge-t-elle ? Si oui, identifier sa limite.
   Solution : D'après le cours, la martingale (Y_n) converge presque sûrement. Sa limite est nulle presque sûrement. En effet, pour tout $\varepsilon > 0$, on a $\sum_n \mathbb{P}(|Y_n| > \varepsilon) = \sum_n 2^{-n} < +\infty$ et d'après le lemme de Borel-Cantelli $\mathbb{P}(\limsup\{|Y_n| > \varepsilon\}) = 0$ i.e. presque sûrement, à partir d'un certain rang $|Y_n| \leq \varepsilon$ et donc $|Y_n| = 0$.

Exercice 6 *Suites extraites d'une chaîne de Markov*
On considère $(X_n)_{n\geq 0}$ une chaîne de Markov de matrice de transition Q. Les suites ci-dessous sont-elles des chaînes de Markov ? Dans l'affirmative, préciser leur matrice de transition.

1. $(Y_n)_{n\geq 0} := (X_{n+k})_{n\geq 0}$, où $k \in \mathbb{N}$ est fixé.
   Solution : la suite $(Y_n)_{n\geq 0}$ est bien une chaîne de Markov. Par exemple, on peut écrire :
   $$Y_{n+1} = X_{n+1+k} = f(X_{n+k}, U_{n+1+k}) = f(Y_n, \widetilde{U}_{n+1}), \text{ avec } \widetilde{U}_n := U_{n+k} \textit{ i.i.d.}$$
   La matrice de transition de Y n'est autre que la matrice Q :
   $$\mathbb{P}(Y_{n+1} = j | Y_n = i) = \mathbb{P}(X_{n+k+1} = j | X_{n+k} = i) \overset{Markov}{=} \mathbb{P}_i(X_1 = j) = Q(i,j).$$
2. $(Z_n)_{n\geq 0} := (X_{2n})_{n\geq 0}$.
   Solution : ici encore $(Z_n)_{n\geq 0}$ est bien une chaîne de Markov. Par exemple, on peut écrire :
   $$\begin{aligned} Z_{n+1} = X_{2n+2} &= f(X_{2n+1}, U_{2n+2}) = f(f(X_{2n}, U_{2n+1}), U_{2n+2}) \\ &= g(Z_n, \widetilde{U}_{n+1}) \text{ avec } \widetilde{U}_n := (U_{2n-1}, U_{2n}) \textit{ i.i.d.} \end{aligned}$$
   La matrice de transition de Z est la matrice Q^2 :
   $$\mathbb{P}(Z_{n+1} = j | Z_n = i) = \mathbb{P}(X_{2n+2} = j | X_{2n} = i) \overset{Markov}{=} \mathbb{P}_i(X_2 = j) = Q^2(i,j).$$

Exercice 7 *Chaîne pressée*
Soient E un ensemble au plus dénombrable, Q une matrice de transition sur E et $(X_n)_{n\geq 0}$ la chaîne de Markov canonique associée. On suppose que pour tout $x \in E$, on a $Q(x,x) < 1$. On définit alors une suite de variables aléatoires à valeurs entières $\tau_0 := 0$, $\tau_1 := \inf\{n \geq 1, X_n \neq X_0\}$ et pour $n \geq 1$, $\tau_{n+1} := \tau_n + \tau_1 \circ \theta_{\tau_n}$.

1. Montrer que τ_1 est un temps d'arrêt et que pour tout $x \in E$, τ_1 est fini $\mathbb{P}_x-$presque sûrement. Calculer la loi de τ_1 ainsi que celle de X_{τ_1}.
Solution : Sous $\mathbb{P}_x$, τ_1 est le temps d'atteinte du complémentaire de x, c'est donc bien un temps d'arrêt. Il est fini presque sûrement car
$$\mathbb{P}_x(\tau_1 = +\infty) = \mathbb{P}_x(X_n = x,\ \forall n \geq 0) \leq \mathbb{P}_x(X_n = x,\ \forall 0 \leq n \leq N) = Q(x,x)^N \stackrel{N\infty}{\longrightarrow} 0.$$
Le temps τ_1 est de loi géométrique :
$$\mathbb{P}_x(\tau_1 = k) = \mathbb{P}_x(X_1 = x, \ldots, X_{k-1} = x, X_k \neq x) = Q(x,x)^{k-1}(1 - Q(x,x)).$$
La loi de X_{τ_1} est donnée par $\mathbb{P}_x(X_{\tau_1} = x) = 0$ et pour $y \neq x$:
$$\begin{aligned}\mathbb{P}_x(X_{\tau_1} = y) &= \sum_{k\geq 1} \mathbb{P}_x(X_{\tau_1} = y,\ \tau_1 = k) = \sum_{k \geq 1} \mathbb{P}_x(X_1 = x, \ldots, X_{k-1} = x, X_k = y) \\ &= \sum_{k\geq 1} Q(x,x)^{k-1}Q(x,y) = \frac{Q(x,y)}{1 - Q(x,x)} =: \widetilde{Q}(x,y).\end{aligned}$$

2. Donner une autre façon de définir la suite $(\tau_n)_{n\geq 0}$ et montrer que les τ_n sont des temps d'arrêt.
Solution : on a $\tau_{n+1} = \inf\{k > \tau_n,\ X_k \neq X_{\tau_n}\}$. par ailleurs, pour $N \geq 1$, on a
$$\{\tau_{n+1} = N\} = \bigcup_{i\in E}\{X_{\tau_n} = X_{\tau_n+1} = \ldots X_{N-1} = i, X_N \neq i\} \in \mathcal{F}_N.$$

3. Montrer que la suite $(Y_n)_{n\geq 0} := (X_{\tau_n})_{n\geq 0}$ est une chaîne de Markov par rapport à la filtration $(\mathcal{F}_{\tau_n})$. Quelle est sa matrice de transition ?
Solution : on rappelle que $\tau_{n+1} := \tau_n + \tau_1 \circ \theta_{\tau_n}$, en appliquant la propriété de Markov au temps τ_n, on a alors
$$\begin{aligned}\mathbb{P}_x(Y_{n+1} = x_{n+1}|Y_1 = x_1, \ldots, Y_n = x_n) &= \mathbb{P}_x(X_{\tau_{n+1}} = x_{n+1}|X_{\tau_1} = x_1, \ldots, X_{\tau_n} = x_n) \\ &= \mathbb{P}_{x_n}(X_{\tau_1} = x_{n+1}) = \widetilde{Q}(x_n, x_{n+1}).\end{aligned}$$
Autrement dit, la suite Y_n est une chaîne de Markov de probabilité de transition $\widetilde{Q}$.

4. On suppose que (X_n) est irréductible récurrente de mesure invariante μ. Montrer que la chaîne (Y_n) est également irréductible récurrente et que $\pi(y) := (1 - Q(y,y))\mu(y)$ est une mesure invariante pour cette dernière.
Solution : comme $\widetilde{Q}(y,y) = 0$ et comme μ est $Q-$invariante, on a
$$\begin{aligned}\sum_{x\in E} \pi(x)\widetilde{Q}(x,y) &= \sum_{x\in E, x\neq y} \pi(x)\widetilde{Q}(x,y) = \sum_{x \in E, x\neq y} (1 - Q(x,x))\mu(x) \times \frac{Q(x,y)}{1 - Q(x,x)} \\ &= \sum_{x\in E, x\neq y} \mu(x)Q(x,y) = \sum_{x\in E} \mu(x)Q(x,y) - \mu(y)Q(y,y) \\ &= \mu(y) - Q(y,y)\mu(y) \\ &= \pi(y).\end{aligned}$$