Contrôle continu # 2

Durée 1 heure, aucun document n'est autorisé.

Exercice 1 *Maximum d'une marche aléatoire simple*
Soit S_n une marche aléatoire simple et symétrique sur $\mathbb{Z}$ i.e. $S_0 = 0$ et $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$ pour $n \geq 1$ où les variables X_i sont indépendantes et identiquement distribuées de loi de Bernoulli $\mathcal{B}(\pm 1, 1/2)$. On note $M_n = \max\{S_k,\ 0 \leq k \leq n\}$ le maximum de la trajectoire jusqu'au temps n et $Y_n = M_n - S_n$ la différence entre ce maximum et la position courante.

1. Montrer que la suite $(Y_n)_{n\geq 0}$ est une chaîne de Markov.
2. En déduire que la somme de deux chaînes de Markov n'est pas toujours une chaîne de Markov.

Exercice 2 *Classification et probabilités d'absorption*
On considère une chaîne de Markov $(X_n)_{n\geq 0}$ à valeurs dans $E = \{1, 2, \ldots, 6\}$ et de matrice de transition

$$Q := \begin{pmatrix} 0 & 1/3 & 2/3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/4 & 3/4 & 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/5 & 2/5 & 1/5 & 1/5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Établir la classification des états de la chaîne, i.e. déterminer quels sont les états absorbants, transitoires, récurrents, et les classes de récurrence.
2. Calculer les probabilités d'absorption dans les classes de récurrence.
3. Pour chaque état transitoire $i \in E$, calculer le temps moyen d'absorption dans l'état absorbant pour la chaîne issue de i, sachant que celui-ci est fini.
4. Question bonus : déterminer les mesures invariantes de la chaîne.