Feuille de travaux pratiques # 5

Exercice 1 *Urne d'Ehrenfest*
Soit $d \geq 2$ un entier pair. On considère la chaîne de Markov associée à l'urne d'Ehrenfest, i.e. la chaîne de Markov sur $E = \{0, 1, \dots, d\}$ de matrice de transition

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \frac{1}{d} & 0 & \frac{d-1}{d} & 0 & \dots & \vdots \\ 0 & \frac{2}{d} & 0 & \frac{d-2}{d} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \dots & 0 & \frac{d-1}{d} & 0 & \frac{1}{d} \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Comment saisir la matrice Q en `Scilab` sans faire de boucle ? On pourra consulter l'aide de la commande `diag`.
2. En utilisant la fonction prédéfinie `grand(n,‘‘markov’’, Q, 1)`, écrire un programme qui génère et trace une trajectoire de cette chaîne.
3. La chaîne est-elle irreductible ? apériodique ? Pour $\varepsilon \in [0, 1]$, on pose $Q_\varepsilon := (1 - \varepsilon)Q + \varepsilon I$. Que dire de la période de la chaîne associée à Q_ε, de sa mesure invariante ?
4. Vérifier numériquement que la loi binomiale $\mathcal{B}(d, 1/2)$ satisfait l'équation $\pi Q = \pi$. On pourra par exemple utilise la commande `binomial(d,k)`.
5. Comme dans le cours, on note $T_\ell := \inf\{n \geq 1, X_n = \ell\}$. En prenant $d = 10$, comparer par simulation les quantités $\mathbb{E}_\ell(T_\ell)$ et $\pi(\{\ell\})$.
6. Toujours dans le cas $d = 10$, illustrer le théorème ergodique par simulation i.e. illustrer le fait que, pour $\ell \in \{0, \dots, d\}$, presque sûrement, lorsque n tend vers l'infini :
$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \mathbb{1}_{Xk=\ell} \longrightarrow \pi(\{\ell\}).$$
7. Comment simuler les trajectoires d'une chaîne d'Ehrenfest lorsque le nombre de particules atteint $d = 1000000$?

Exercice 2 *Fonctions itérées aléatoires*
On a vu dans le cours qu'une formule de récurrence du type $X_{n+1} = f(X_n, U_{n+1})$, où f est une fonction mesurable et $(U_n)_{n\geq 1}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes et de même loi, indépendante de X_0, définit une chaîne de Markov. Lorsque les variables U_n sont à valeurs dans un ensemble fini, disons $\{1, \dots, p\}$, la formule de récurrence peut s'interprêter de la façon suivante. On dispose a priori d'un ensemble de fonctions déterministes $(g_i)_{1\leq i\leq p}$ (ici $g_i(\cdot) = f(\cdot, i)$). À chaque itération, on choisit au hasard un entier $i \in \{1, \dots, p\}$, X_{n+1} est alors défini comme l'image de X_n par g_i. Suivant le type d'applications g_i données a priori, la dynamique obtenue peut être très riche / complexe. Voici quelques exemples dans le cas affine, les deux premiers étant issus de P. Diaconis et D. Freedman – « Iterated random functions », SIAM Rev. 41 (1999), no. 1, p. 45-76.

Pour chacun des exemples ci-dessous, écrire un programme qui trace une trajectoire de la chaîne de Markov correspondante issue de zéro.

1. Les variables U_n sont des variables de Bernoulli $\mathcal{B}(1/2)$ et les fonctions g_0 et g_1 sont les fonctions affines de la droite réelle $g_0(x) := ax - 1$ et $g_1(x) := ax + 1$ où $0 < a < 1$. Montrer que la loi de la variable $\ell_\infty := \sum_{i=0}^{+\infty} a^i U_{i+1}$ est invariante par la dynamique.
2. Les variables U_n sont des variables de Bernoulli $\mathcal{B}(p)$ avec $p = 0.2993$ et les fonctions g_0 et g_1 sont les fonctions affines du plan $\mathbb{R}^2$ données par

$$g_0(x) = \begin{pmatrix} 0.4000 & -0.3733 \\ 0.0600 & 0.6000 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0.3533 \\ 0.0000 \end{pmatrix},$$

$$g_1(x) = \begin{pmatrix} -0.8000 & -0.1867 \\ 0.1371 & 0.8000 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 1.1000 \\ 0.1000 \end{pmatrix}.$$

3. Les variables U_n sont des variables de Bernoulli $\mathcal{B}(1/2)$ et les fonctions g_0 et g_1 sont les fonctions affines du plan $\mathbb{R}^2$ données par

$$g_0(x) = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$g_1(x) = \begin{pmatrix} -1/2 & -1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

4. Les variables U_n sont des variables uniformes sur $\{1, 2, 3\}$ et les fonctions g_i sont de la forme $g_i(x) = A_i x + b_i$ avec

$$A_1 = A_2 = A_3 = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix},$$

et

$$b_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad b_2 = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad b_3 = \begin{pmatrix} 1/4 \\ \sqrt{3}/4 \end{pmatrix}.$$

5. Les variables U_n sont des variables uniformes sur $\{1, 2, 3\}$ et les fonctions g_i sont de la forme $g_i(x) = A_i x + b_i$ avec

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix}, \quad b_1 = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} r\cos(\phi) & -r\sin(\phi) \\ r\sin(\phi) & r\cos(\phi) \end{pmatrix}, \quad b_2 = \begin{pmatrix} 1/2 - \frac{r}{2}\cos(\phi) \\ c - \frac{r}{2}\sin(\phi) \end{pmatrix},$$

et

$$A_3 = \begin{pmatrix} q\cos(\psi) & -r\sin(\psi) \\ q\sin(\psi) & r\cos(\psi) \end{pmatrix}, \quad b_2 = \begin{pmatrix} 1/2 - \frac{q}{2}\cos(\psi) \\ \frac{3c}{5} - \frac{q}{2}\sin(\psi) \end{pmatrix},$$

avec

$$c = 0.255, \quad r = 0.750, \quad q = 0.625, \quad \phi = -\pi/8, \quad \psi = \pi/5.$$