Feuille d'exercices # 8

Exercice 1 *Retour sur la chaîne à deux états*
Pour $p \in [0,1]$ et $q \in [0,1]$, on considère une chaîne de Markov d'états $\{0,1\}$ et de matrice de transition

$$Q := \begin{pmatrix} p & 1-p \\ 1-q & q \end{pmatrix}.$$

1. Sous quelles conditions la chaîne est-elle apériodique irréductible ? Quelles sont les lois stationnaires ?
2. Que se passe-t-il lorsque la chaîne n'est pas irréductible ou périodique ? Quels sont alors les états récurrents et transients ? Quelles sont les lois stationnaires ?

Exercice 2 *Classification des états dans le modèle de Wright-Fisher*
Soient k et N deux entiers tels que $0 < k < N$. On considère la chaîne de Markov $(X_n^N)_{n\geq 0}$ à valeurs dans $E := \{0,\ldots,N\}$, issue de $X_0^N := k$ et dont la matrice de transition est donnée par :

$$Q_{ij} = \mathbb{P}(X_{n+1}^N = j | X_n^N = i) = \binom{N}{j}\left(\frac{i}{N}\right)^j \left(1-\frac{i}{N}\right)^{N-j}.$$

1. Déterminer les états récurrents et transitoires de la chaîne.
2. Même question si on considère le modèle avec taux de mutation $(u,v) \in]0,1[^2$, c'est-à-dire la chaîne $(\widetilde{X}_n^N)_{n\geq 0}$ dont la matrice de transition est

$$\widetilde{Q}_{ij} = \binom{N}{j}\left((1-u)\frac{i}{N} + v\left(1-\frac{i}{N}\right)\right)^j \left((u\frac{i}{N} + (1-v)\left(1-\frac{i}{N}\right)\right)^{N-j}.$$

Exercice 3 *Pour se faire la main*
Sur les espaces d'états $\{1,2,3,4\}$ et $\{1,2,3,4,5\}$ respectivement, on considère des chaînes de Markov de matrices de transitions respectives :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/4 & 1/4 & 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

Déterminer les états transitoires et les classes de récurrence de ces chaînes.

Exercice 4 $\Sigma\iota\sigma\upsilon\varphi o\varsigma$
Soit (X_n) une chaîne de Markov d'espace d'états $E = \mathbb{N}$, et dont la matrice de transition est donnée par $Q(n,n+1) = \theta_n$ et $Q(n,0) = 1-\theta_n$, où $0 < \theta_n < 1$ pour $n \geq 0$.

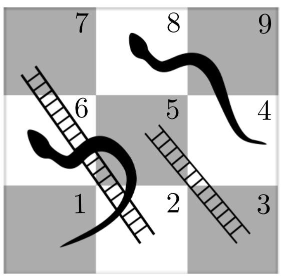
1. Étudier la nature de l'état 0, puis des autres états.
2. Existe-t-il une mesure réversible, invariante ?

Exercice 5 *Classification et probabilités d'absorption*
On considère une chaîne de Markov $(X_n)_{n\geq 0}$ à valeurs dans $E = \{1, 2, \dots, 6\}$ et de matrice de transition

$$Q := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/5 & 2/5 & 2/5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/6 & 1/3 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1/4 & 0 & 3/4 \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer quels sont les états transoires et les états récurrents.
2. Calculer les probabilités d'absorption dans les classes de récurrence.
3. Déterminer les mesures invariantes de la chaîne.

Exercice 6 *Serpents et échelles*



On joue au jeu suivant : un joueur débute à la case 1 et à chaque temps n, lance une pièce équilibrée. Selon le résultat, il avance d'une ou deux cases sur le plateau de jeu. S'il arrive au pied d'une échelle, il grimpe en haut de l'échelle ; s'il arrive sur la tête d'un serpent, il descend à la queue. Le but est d'atteindre la case 9.

1. Combien de tours en moyenne doit-on jouer pour terminer le jeu ?
2. Quelle est la probabilité qu'un joueur ayant atteint la case 5 termine le jeu sans retomber à la case 1 ?

Exercice 7 *Chaîne de naissance et de mort*
Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une chaîne de Markov à valeurs dans $\mathbb{N}$ telle que $X_0 := a \in \mathbb{N}^*$, et pour $n \geq 0$,

$$\begin{cases} \mathbb{P}(X_{n+1} = k+1 | X_n = k) = p_k, \\ \mathbb{P}(X_{n+1} = k-1 | X_n = k) = q_k, \end{cases} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} p_k + q_k = 1, \\ p_k > 0, q_k > 0, \end{cases} \quad \text{pour} \ \ k \geq 1,$$

et $\mathbb{P}(X_{n+1} = 0 | X_n = 0) = 1$. On cherche à exprimer la probabilité d'extinction c'est-à-dire $h_i := \mathbb{P}_i(\exists n, X_n = 0)$. Pour tout $k \geq 1$, on suppose que $p_k > 0$ et on pose $\gamma_k := \frac{q_k q_{k-1} \cdots q_1}{p_k p_{k-1} \cdots p_1}$.

1. Déterminer une relation de récurrence vérifiée par la suite $(h_i)_{i\in\mathbb{N}}$.
2. Suivant que $\sum_{k\geq 1} \gamma_k$ est finie ou non, exprimer h_i.
3. Déterminer les mesures réversibles pour la chaîne X_n.
4. À quelle condition existe-t-il une mesure de probabilité réversible ?

Exercice 8 *Entomologie*
Une puce saute chaque seconde au hasard d'un sommet d'un triangle à un autre, indépendamment et uniformément. Une tique, quant à elle, choisit deux fois plus souvent de sauter dans le sens direct que dans le sens indirect. Quelles sont les mesures réversibles (resp. invariantes) des deux dynamiques ? Dans les deux cas, calculer la probabilité que l'animal se retrouve à son sommet de départ au bout de n sauts.

Exercice 9 *Réversibilité modulo n*
On fixe $n \geq 2$ et on considère la marche aléatoire simple sur $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, dont la matrice de transition est donnée par $Q(i, i+1) = p$, $Q(i, i-1) = 1-p$ où $0 < p < 1$. Montrer que la chaîne est réversible si et seulement si $p = 1/2$.