Feuille d'exercices # 5

Exercice 1 *Thunderbolt*
On peut se demander si les performances sportives seront toujours battues et si oui, à quel rythme. Afin de modéliser cette situation, on considère une suite (X_n) de variables aléatoires indépendantes et de même loi admettant une densité par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^+$. Pour tout entier $n \geq 1$ fixé, on note $(X_{(1)}, \ldots, X_{(n)})$ le vecteur composé des variables X_i réordonnées, c'est-à-dire $X_{(1)} < X_{(2)} < \ldots < X_{(n)}$, et on note R_n le rang relatif de X_n. Il est clair que R_n est une variable aléatoire à valeurs dans $\{1, 2, \ldots, n\}$. Pour $n \geq 1$, on dit qu'il se produit un record à l'instant n si $R_n = 1$. On s'intéresse au comportement asymptotique des suites (Z_n) et (M_n) données par

$$Z_n := \sum_{k=1}^{n} \mathbb{1}_{R_k=1}, \qquad M_n := Z_n - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

La suite (Z_n) compte le nombre de records qui se produisent avant l'instant n. On rappelle que

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \log(n) + \gamma + o(1),$$

où $\gamma \approx 0.5772$ est la constante d'Euler.

1. Montrer que les variables aléatoires $R_1, \ldots, R_n$ sont indépendantes et que pour $1 \leq k \leq n$:
$$\mathbb{P}(R_n = k) = \frac{1}{n}.$$
2. Calculer, pour tout $n \geq 1$, l'espérance et la variance de Z_n.
3. Montrer que (M_n) est une martingale de carré intégrable et calculer son compensateur $\langle M \rangle_n$.
4. En déduire la convergence presque sûre
$$\lim_{n \to +\infty} \frac{M_n}{\log(n)} = 0.$$
5. Montrer également le théorème limite central
$$\frac{M_n}{\sqrt{\log(n)}} \xrightarrow{loi} \mathcal{N}(0, 1).$$
6. En déduire que lorsque n tend vers l'infini, $Z_n/\log(n)$ tend presque vers 1 et que l'on a
$$\frac{Z_n - \log(n)}{\sqrt{\log(n)}} \xrightarrow{loi} \mathcal{N}(0, 1).$$

Exercice 2 *La prochaine est rouge*
On prend un jeu de 52 cartes, dont on retourne les cartes une à une. Le joueur peut, une et une seule fois au cours du jeu, dire “la prochaine est rouge” ; il gagne si la carte suivante est rouge, sinon il perd.

On se demande quelles sont les stratégies de jeu qui optimisent la probabilité de victoire. Pour $n = 0, \dots, 51$, on note R_n le nombre de cartes rouges encore dans le jeu après avoir retourné n cartes. Soit A_n l'évènement “la $n-$ième carte retournée est rouge”.

1. Calculer $\mathbb{P}(A_{n+1}|R_n = j)$, pour $j \in \{2, \dots, 26\}$ et $n \in \{0, \dots, 50\}$.
2. Calculer $\mathbb{P}(R_{n+1} = j|R_n) = \mathbb{P}(R_{n+1}|\mathcal{F}_n)$, pour $n \in \{0, \dots, 50\}$ et $j \in \{0, \dots, 26\}$, où on a posé $\mathcal{F}_n := \sigma(R_0, \dots, R_n)$.
3. Montrer que, pour $n \in \{0, \dots, 50\}$,
$$\mathbb{E}(R_{n+1}|\mathcal{F}_n) = R_n - \frac{R_n}{52 - n}.$$
4. Montrer que $X_n := R_n/(52-n)$, $n = 0, \dots, 51$, est une martingale par rapport à la filtration $(\mathcal{F}_n)$ et que $X_n = \mathbb{P}(A_{n+1}|\mathcal{F}_n)$.
5. On définit $\tau \in \{0, \dots, 51\}$ le temps où le joueur dit “la prochaine est rouge” avant de retourner la $(n+1)-$ième carte. Montrer que τ est un temps d'arrêt et que la probabilité de victoire est $\mathbb{E}(X_\tau)$. Montrer que, pour toute stratégie, la probabilité p de victoire dans ce jeu est toujours la même et calculer p.