Université de Rennes 1 — Master 1 Mathématique
Martingales et chaînes de Markov — année 2013-2014

# Feuille d'exercices # 2 (suite)

**Exercice 8** *Ruine du joueur et identité de Wald*
Soient $a$ et $b$ des entiers strictement positifs et $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées de loi $\mu := p\delta_1 + q\delta_{-1} + r\delta_0$ où $0 \leq p, q, r < 1$ et $p+q+r=1$. On note $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 1}$ la filtration naturelle associée. On pose $S_0 := 0$ et $S_n := X_1 + \ldots + X_n$ pour $n \geq 1$.

1. Soit $T = \inf\{n \geq 0,\ S_n \notin ]-a, b[\}$. Montrer que $T$ est un temps d'arrêt fini presque sûrement.
2. Soit $\phi$ la transformée de Laplace de $\mu$ i.e. $\phi(\lambda) = pe^{\lambda} + qe^{-\lambda} + r$ pour $\lambda \in \mathbb{R}$. Pour $n \geq 1$, on pose $Y_n := e^{\lambda S_n}/\phi(\lambda)^n$. Montrer que la suite $(Y_n)_{n\geq 1}$ est une martingale
3. Soit $\lambda$ tel que tel que $\phi(\lambda) \geq 1$. Montrer que $\mathbb{E}(e^{\lambda S_T}\phi(\lambda)^{-T}) = 1$.
4. On suppose désormais que $p = q = 1/2$. Calculer $\mathbb{E}(S_T)$, $\mathbb{P}(S_T = -a)$, $\mathbb{P}(S_T = b)$.
5. Pour $\alpha > 1$, calculer $\mathbb{E}[\alpha^{-T}\mathbb{1}_{S_T=-a}]$ et $\mathbb{E}[\alpha^{-T}\mathbb{1}_{S_T=b}]$. En déduire $\mathbb{E}(T|S_T)$ et $\mathbb{E}[T]$.

**Exercice 9** *La martingale de Labouchère*
Dans le cadre d'un jeu de pile ou face équilibré, on considère la stratégie de mise suivante, dite "martingale de Labouchère". On se donne à l'avance une liste de nombres $L = \{x_1, \ldots, x_n\}$ avec pour objectif de gagner $x_1 + x_2 + \ldots + x_n$ euros "à coup sûr" en un temps fini. Voici la stratégie :

— avant chaque tirage de pile ou face, on mise la somme des nombres extrémaux de la liste, par exemple la mise initiale est de $x_1 + x_n$ euros ;
— si l'on gagne le tirage de pile ou face, on empoche la mise et on actualise la liste en supprimant les deux nombres extrémaux, par exemple la liste devient $\{x_2, \ldots, x_{n-1}\}$ si l'on gagne au premier tirage ;
— si l'on perd le tirage de pile ou face, on perd la mise et on actualise la liste en ajoutant à la liste initiale la mise actuelle. Par exemple, si l'on perd au premier tirage de pile ou face, la liste devient $\{x_1, \ldots, x_n, x_{n+1} := x_1 + x_n\}$.
— on s'arrête de jouer lorsque la liste est vide ;
— si la liste contient un seul élément $x_k$, on mise cet élément. Si l'on gagne le tirage de pile ou face, on empoche $x_k$ et on s'arrête, sinon la liste est actualisée à $\{x_k, x_k\}$.

Voici un exemple de partie si l'on joue avec la liste $L = \{1, 2, 4\}$ et si le début de la suite de pile ou face est $PGPGPG$ ($P$ = perdu, $G$ = gagné). Le premier argument désigne la somme totale que l'on a gagnée / perdue, le second est la liste actualisée :

$$\begin{array}{ccccccc}
(0,\{1,2,4\}) & \xrightarrow{P} & (-5,\{1,2,4,5\}) & \xrightarrow{G} & (+1,\{2,4\}) & \xrightarrow{P} & (-5,\{2,4,6\}) \\
 & & & & & & \downarrow G \\
 & & (7,\{\emptyset\}) & \xleftarrow{G} & (-1,\{4,4\}) & \xleftarrow{P} & (+3,\{4\})
\end{array}$$

1. Montrer que presque sûrement, la martingale de Labouchère permet effectivement de gagner $x_1 + x_2 + \ldots + x_n$ euros en un temps aléatoire $T$ qui vérifie $\mathbb{E}[T] < +\infty$.
2. Si $X_k$ désigne la somme gagnée / perdue après $k$ tirages de pile ou face, calculer $\mathbb{E}[\inf_{k\geq 1} X_{T\wedge k}]$.