Feuille d'exercices # 2

Exercice 1 *Autour de la notion de martingale*

1. Soit $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$ une filtration (suite croissante de tribus) d'un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. La réunion $\bigcup_{n\geq 0} \mathcal{F}_n$ est-elle toujours une tribu ?
2. Que dire d'une martingale (resp. d'une sous-martingale, d'une surmartingale) par rapport une filtration constante ?
3. Soit $(M_n)_{n\geq 0}$ une martingale par rapport à une filtration $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$. Pour $n \geq 0$, on note $\mathcal{G}_n = \sigma(M_0, \ldots, M_n)$ la filtration canonique associée à la martingale $(M_n)_{n\geq 0}$. Montrer que la suite $(M_n)_{n\geq 0}$ est une martingale pour la filtration $(\mathcal{G}_n)_{n\geq 0}$.
4. Trouver une suite de variables aléatoires $(M_n)_{n\geq 0}$ avec $\mathbb{E}[|M_n|] < +\infty$ pour tout n et telle que $\mathbb{E}[M_{n+1}|M_n] = M_n$ sans pour autant que $(M_n)_{n\geq 0}$ soit une martingale.

Exercice 2 *Martingale identiquement distribuée*

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une sous-martingale telle que les variables X_n ont toutes même loi.

1. Montrer que la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est en fait une martingale, ainsi que $(X_n \vee a)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(X_n \wedge a)_{n\in\mathbb{N}}$ où a est un réel fixé.
2. Soient $n > m$ deux entiers et a un réel. Montrer que sur l'ensemble $\{\omega,\ X_m(\omega) \geq a\}$, on a $X_n \geq a$ presque sûrement. En déduire que la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante presque sûrement.

Exercice 3 *Martingale multiplicative*

Soient $Y_1, Y_2, \ldots$ des variables aléatoires positives indépendantes et identiquement distribuées et la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $X_0 = 1$ et $X_n := \prod_{i=1}^n Y_i$ pour $n \geq 1$.

1. Sous quelles conditions la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est-elle une surmartingale ? Une sous-martingale ? Une martingale ?
2. On se place dans le dernier cas et l'on suppose de plus que $\mathbb{P}(Y_1 = 1) < 1$ et qu'il existe $\delta > 0$ tel que $Y_n \geq \delta$. Montrer qu'alors $\mathbb{E}[\log Y_1] < 0$ et utiliser la loi des grands nombres pour $\log X_n/n$ pour montrer que $\lim_{n\to+\infty} X_n = 0$ presque sûrement.

Exercice 4 *Urne de Pólya*

On dispose (d'une infinité) de boules rouges et vertes. À l'instant 0, une urne contient une boule de chaque couleur et on effectue une succession de tirages définis par la règle suivante : on tire une boule de l'urne "au hasard" et on la remet dans l'urne en ajoutant une boule du même couleur. Soit S_n le nombre de boules rouges au temps n, et $X_n := S_n/(n+2)$ la proportion de boules rouges au temps n.

1. Montrer que pour toute fonction f mesurable bornée, on a la relation :
$$\mathbb{E}[f(S_{n+1})|S_n] = f(S_n+1)\frac{S_n}{n+2} + f(S_n)\frac{n+2-S_n}{n+2}$$
2. Montrer que la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une martingale par rapport à sa filtration naturelle $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et calculer $\mathbb{E}[X_n]$.

Exercice 5 *Théorème d'arrêt et inégalités maximales*
On considère un espace de probabilité filtré $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}, \mathbb{P})$.

1. Soient $(X_n)_{n\geq 0}$ une sous-martingale par rapport à $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$ et $x > 0$. Montrer que
$$x\,\mathbb{P}\left(\max_{1\leq k\leq n} X_k \geq x\right) \leq \mathbb{E}[X_n^+].$$
2. Soient $(X_n)_{n\geq 0}$ une sur-martingale positive par rapport à $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$ et $x > 0$. Montrer que
$$x\,\mathbb{P}\left(\max_{1\leq k\leq n} X_k \geq x\right) \leq \mathbb{E}[X_0].$$

Exercice 6 *Marche aléatoire et martingales*
Soit $(Y_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires réelles indépendantes et identiquement distribuées avec $\mathbb{P}(Y_i = 1) = p = 1 - P(Y_i = -1)$. Pour $n \geq 1$, on pose $S_n = \sum_{i=1}^n Y_i$ et $S_0 = 0$.

1. Montrer que les suites $(W_n)_{n\geq 0}$ et $(M_n)_{n\geq 0}$ définies ci-dessous sont des martingales par rapport à la filtration naturelle des Y_n.
$$W_n := S_n - (2p-1)n,\ \ W_0 := 0, \qquad M_n := \left(\frac{1-p}{p}\right)^{S_n},\ \ M_0 := 1.$$
2. Pour chacune des variables ci-dessous, déterminer si elle est ou non un temps d'arrêt :
$$U := \min\{n \geq 5,\, S_n = S_{n-5} + 5\}, \quad V := U - 5, \quad W := \min\{n,\, S_n = 1\}.$$
3. On se place dans le cas symétrique i.e. $p = q = 1/2$, soient $0 < a < K$ des entiers. On considère $S_n^a := a + S_n$ la marche issue de $a > 0$ et $T := \inf\{k,\, S_k = 0\,\text{ou}\,S_k = K\}$. Montrer que $N_n := \sum_{k=0}^n S_k^a - \frac{1}{3}(S_k^a)^3$ est une martingale et en déduire que
$$\mathbb{E}\left[\sum_{k=0}^T S_k^a\right] = \frac{1}{3}(K^2 - a^2)a + a.$$
4. On suppose maintenant que $0 < p < 1/2$. En utilisant la martingale $(M_n)_{n\geq 0}$, montrer que
$$\mathbb{E}\left[\sup_{n\geq 0} S_n\right] \leq \frac{p}{1-2p}.$$
Montrer qu'on a en fait une égalité.

Exercice 7 *Un critère de finitude pour les temps d'arrêt*
Soit T un temps d'arrêt pour une filtration $(\mathcal{F}_n)_{\geq 0}$. On suppose qu'il existe $\varepsilon > 0$ et $N \geq 1$ un entier tels que pour tout $n \geq 0$, on a $\mathbb{P}(T \leq n + N|\mathcal{F}_n) > \varepsilon,\ p.s.$. Montrer que T est fini presque sûrement et que $\mathbb{E}[T] < +\infty$.