FEUILLE D'EXERCICES DE RÉVISION

Exercice 1 *Sur les espérances et les loi conditionnelles*

1. Soit (X, Y) un vecteur gaussien centré de covariance $\Gamma := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. Calculer $\mathbb{E}(X|Y)$ et donner la loi conditionnelle $\mathcal{L}(X|Y = y)$.
2. Soient X et Y deux variables aléatoires de carré intégrable telles que $\mathbb{E}(X|Y) = Y$ et $\mathbb{E}(Y|X) = X$ presque sûrement. Montrer que $X = Y$ presque sûrement.
3. Soient $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires réelles indépendantes de même densité f continue, d'espérance finie et soit $X_{(1)} < \ldots < X_{(n)}$ leur statistique d'ordre. Déterminer la loi de X_1 sachant $X_{(n)}$ en fonction de la densité f et fonction de répartition $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(u)du$.

Exercice 2 *Identités de martingales de carré intégrable*
Soient $(X_n)_{n\geq 0}$ et $(Y_n)_{n\geq 0}$ deux $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$ martingales de carré intégrable. Démontrer les assertions suivantes :

1. Pour $m \leq n$, $\mathbb{E}[X_n Y_m|\mathcal{F}_m] = X_m Y_m$ presque sûrement ;
2. $\mathbb{E}[X_n Y_n] - \mathbb{E}[X_0 Y_0] = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}[(X_k - X_{k-1})(Y_k - Y_{k-1})]$;
3. $\mathrm{Var}(X_n) = \mathrm{Var}(X_0) + \sum_{k=1}^{n} \mathrm{Var}(X_k - X_{k-1})$;
4. Les variables aléatoires X_0, $(X_k - X_{k-1})$, $k \geq 1$, sont deux à deux orthogonales dans $\mathbb{L}^2$.

Exercice 3 *Différence de martingale*
Soit $(M_n)_{n\geq 0}$ une martingale réelle telle que pour tout $n \geq 0$, $|M_n| \leq K$. On pose

$$X_n := \sum_{k=1}^{n} \frac{(M_k - M_{k-1})}{k}, \quad n \geq 0.$$

Montrer que $(X_n)_{n\geq 0}$ est une martingale qui converge presque sûrement et dans $\mathbb{L}^2$.

Exercice 4 *Une martingale exponentielle*
Soit $(Y_n)_{n\geq 0}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées de loi normale $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$. On pose $\mathcal{F}_n := \sigma(Y_1, ..., Y_n)$ et $X_n := Y_1 + ... + Y_n$ pour $n \geq 0$. Enfin, pour $u \in \mathbb{R}$ et $n \geq 0$, on pose

$$Z_n^u := \exp(uX_n - nu^2\sigma^2/2).$$

Montrer que Z_n^u est une martingale et qu'elle converge presque sûrement. Identifier la limite.

Exercice 5 *Martingale produit*
Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et de même loi $\mu = 1/2(\delta_0 + \delta_2)$. On pose $Y_n := X_1 \times \ldots \times X_n$.

1. La suite $(Y_n)_{n\geq 1}$ est-elle une martingale ?
2. La suite $(Y_n)_{n\geq 1}$ est-elle bornée dans $\mathbb{L}^1$?
3. La suite $(Y_n)_{n\geq 1}$ converge-t-elle ? Si oui, identifier sa limite.

Exercice 6 *Suites extraites d'une chaîne de Markov*
On considère $(X_n)_{n\geq 0}$ une chaîne de Markov de matrice de transition Q. Les suites ci-dessous sont-elles des chaînes de Markov ? Dans l'affirmative, préciser leur matrice de transition.

1. $(Y_n)_{n\geq 0} := (X_{n+k})_{n\geq 0}$, où $k \in \mathbb{N}$ est fixé.
2. $(Z_n)_{n\geq 0} := (X_{2n})_{n\geq 0}$.

Exercice 7 *Chaîne pressée*
Soient E un ensemble au plus dénombrable, Q une matrice de transition sur E et $(X_n)_{n\geq 0}$ la chaîne de Markov canonique associée. On suppose que pour tout $x \in E$, on a $Q(x,x) < 1$. On définit alors une suite de variables aléatoires à valeurs entières $\tau_0 := 0$, $\tau_1 := \inf\{n \geq 1, X_n \neq X_0\}$ et pour $n \geq 1$, $\tau_{n+1} := \tau_n + \tau_1 \circ \theta_{\tau_n}$.

1. Montrer que τ_1 est un temps d'arrêt et que pour tout $x \in E$, τ_1 est fini $\mathbb{P}_x-$presque sûrement. Calculer la loi de τ_1 ainsi que celle de X_{τ_1}.
2. Donner une autre façon de définir la suite $(\tau_n)_{n\geq 0}$ et montrer que les τ_n sont des temps d'arrêt.
3. Montrer que la suite $(Y_n)_{n\geq 0} := (X_{\tau_n})_{n\geq 0}$ est une chaîne de Markov par rapport à la filtration $(\mathcal{F}_{\tau_n})$. Quelle est sa matrice de transition ?
4. On suppose que (X_n) est irréductible récurrente de mesure invariante μ. Montrer que la chaîne (Y_n) est également irréductible récurrente et que $\pi(y) := (1 - Q(y,y))\mu(y)$ est une mesure invariante pour cette dernière.

Exercice 8 *Une particule sur un cube*
Une particule se déplace sur les huit sommets d'un cube, choisissant à chaque seconde l'un des trois sommets voisins suivant la loi uniforme. Fixons deux sommets opposés du cube e et a. La particule se trouve initialement en e. On notera $(X_n)_{n\geq 0}$ le processus qui modélise cette situation.

1. Quel est le temps moyen de retour en e ?
2. Quel est le nombre moyen de passages en a avant le retour en e ?

On note A (resp. B) l'ensemble des trois sommets voisins de a (resp. de e). On pose, pour $n \geq 0$,

$$Y_n = B1_B(X_n) + A1_A(X_n) + X_n 1_{X_n \in \{e,a\}}.$$

1. Vérifier que Y est une chaîne de Markov sur $S := \{e, a, A, B\}$. Donner sa matrice de transition.
2. Pour la chaîne Y, calculer $\mathbb{E}_i[T_a]$ pour tout $i \in S$.
3. Quel est le temps moyen nécessaire à la particule pour atteindre a ?