Élements de correction de la feuille # 3

Exercice 8 : *Fonctions intégrables et fonctions étagées*
Soit f une fonction mesurable et intégrable par rapport à la mesure de Lebesgue λ sur $[0,1]$. On souhaite retrouver le résultat suivant : il existe une suite $(f_n)_{n\geq 0}$ de fonctions étagées qui converge presque sûrement et dans $\mathbb{L}^1([0,1], d\lambda)$ vers f. Soient X une variable aléatoire de loi uniforme sur $[0,1]$ et pour tout entier naturel n : $X_n := 2^{-n}\lfloor 2^n X \rfloor$. On pose $Y := f(X)$ et $Y_n := \mathbb{E}[Y|\mathcal{F}_n]$ où $\mathcal{F}_n := \sigma(X_0, X_1, \ldots, X_n)$.

1. Montrer que X_n converge vers X. Quelle signification donner à $2^n(X_n - X_{n-1})$?

   Par définition, on a $|X_n - X| \leq 2^{-n}$, donc $X_n \to X$ presque sûrement et dans $\mathbb{L}^1$. Le nombre $2^n(X_n - X_{n-1})$ n'est autre que le $n-$ième terme dans la décomposition binaire de X.

2. Montrer que Y_n converge presque sûrement et dans $\mathbb{L}^1$. Identifier sa limite.

   On vérifie facilement que Y_n est une martingale uniformément intégrable de sorte qu'elle converge presque sûrement et dans $\mathbb{L}^1$ vers la limite $Y_\infty = \mathbb{E}[Y|\mathcal{F}_\infty]$ où

   $$\mathcal{F}_\infty = \sigma(X_0, X_1, X_2, \ldots) = \sigma(X).$$

   En effet, la variable X est entièrement caractérisée par sa décomposition dyadique, c'est-à-dire par X_0, X_1, $X_2 \ldots$ Ainsi, on a $Y_\infty = \mathbb{E}[f(X)|X] = f(X)$.

3. Expliciter Y_n et conclure.

   Conditionnellement à la tribu $\mathcal{F}_n$, la loi de X n'est autre que la loi uniforme sur l'intervalle $[X_n, X_n + 2^{-n}]$. On a donc

   $$Y_n = \mathbb{E}[f(X)|\mathcal{F}_n] = \mathbb{E}[f(X)|X_0, X_1, \ldots, X_n] = \int_{X_n}^{X_n+2^{-n}} f(u)2^n du = f_n(X)$$

   où la fonction $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ est la fonction étagée :

   $$f_n(x) = 2^n \int_{x_n}^{x_n+2^{-n}} f(u)du, \quad \begin{array}{l} x_n \text{ étant le nombre de la forme } k2^{-n} \\ \text{tel que } x_n \leq x < x_n + 2^{-n}. \end{array}$$

   D'après la question précédente, $f_n(X)$ converge presque sûrement et dans $\mathbb{L}^1$ vers $f(X)$, autrement dit pour presque tout $x \in [0,1]$, on a $f_n(x) \to f(x)$ et

   $$\int_0^1 |f_n(y) - f(y)|dy \to 0.$$

Exercice 9 : *Théorème de Rademacher sur les fonctions lipschitziennes*
Soient $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité, X une variable aléatoire de loi uniforme sur $[0,1]$ et $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction lipschitzienne de constante de Lipschitz $L > 0$. Pour tout $n \geq 0$, on pose $X_n := 2^{-n}\lfloor 2^n X \rfloor$ et $Z_n := 2^n \left(f(X_n + 2^{-n}) - f(X_n)\right)$.

1. Pour $n \geq 1$, montrer les égalités de tribus suivantes :
$$\mathcal{F}_n := \sigma(X_0, X_1, \ldots, X_n) = \sigma(X_n), \qquad \bigcap_{n\geq 0} \sigma(X_n, X_{n+1}, \ldots) = \sigma(X).$$
Vu en cours, faire un dessin.

2. Déterminer $\mathbb{E}[h(X_{n+1})|X_n]$ pour toute fonction $h : [0,1] \to \mathbb{R}$ mesurable continue. En déduire que $(Z_n)_{n\geq 0}$ est une martingale bornée relativement à $(\mathcal{F}_n)$.
Conditionnellement à la tribu $\mathcal{F}_n$, la loi de X_{n+1} n'est autre que la loi uniforme sur l'ensemble $\{X_n, X_n + 2^{-(n+1)}\}$. Ainsi, pour toute $h : [0,1] \to \mathbb{R}$ mesurable continue, on a
$$\mathbb{E}[h(X_{n+1})|\mathcal{F}_n] = \mathbb{E}[h(X_{n+1})|X_n] = \frac{h(X_n)}{2} + \frac{h(X_n + 2^{-(n+1)})}{2} \tag{1}$$
Les variables Z_n sont clairement adaptées. Par ailleurs, la condition de Lipschitz implique que la suite $(Z_n)_{n\geq 0}$ est bornée presque sûrement par la constante C : $|Z_n| \leq C$ *p.s.* pour tout $n \geq 0$. En choisissant $h(x) = 2^{n+1}\big(f(x + 2^{-n+1}) - f(x)\big)$ dans (1), il vient
$$\begin{aligned}\mathbb{E}[Z_{n+1}|\mathcal{F}_n] &= \frac{1}{2} \times 2^{n+1}\big(f(X_n + 2^{-n-1}) - f(X_n)\big)\\ &\quad + \frac{1}{2} \times 2^{n+1}\big(f(X_n + 2^{-n}) - f(X_n + 2^{-n-1})\big)\\ &= 2^n\left(f(X_n + 2^{-n}) - f(X_n)\right) = Z_n.\end{aligned}$$
La suite $(Z_n)_{n\geq 0}$ est donc bien une martingale bornée.

3. Montrer qu'il existe une variable aléatoire Z, limite p.s. et dans $\mathbb{L}^1$ de $(Z_n)_{n\geq 0}$, puis qu'il existe une fonction $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ borélienne bornée telle que $Z = g(X)$.
La martingale $(Z_n)_{n\geq 0}$ étant bornée, elle est uniformément intégrable et converge presque sûrement et dans $\mathbb{L}^1$ vers une variable Z telle que $Z_n = \mathbb{E}[Z|\mathcal{F}_n]$. D'après le cours, Z est $\mathcal{F}_\infty-$mesurable. Or d'après la première question, on a $\mathcal{F}_\infty = \sigma(X)$ ici. Autrement dit, il existe une fonction mesurable g (de fait bornée) telle que $Z = g(X)$.

4. Calculer $\mathbb{E}[h(X)|X_n]$ pour toute fonction $h : [0,1] \to \mathbb{R}$ mesurable bornée. En déduire que presque sûrement :
$$Z_n = 2^n \int_{X_n}^{X_n+2^{-n}} g(u)du.$$
Comme dans l'exercice précédent, conditionnellement à la tribu $\mathcal{F}_n$, la loi de X n'est autre que la loi uniforme sur l'intervalle $[X_n, X_n+2^{-n}]$, on a donc pour toute fonction $h : [0,1] \to \mathbb{R}$ mesurable bornée :
$$\mathbb{E}[h(X)|\mathcal{F}_n] = 2^n \int_{X_n}^{X_n+2^{-n}} h(u)du,$$
en particulier,
$$Z_n = \mathbb{E}[g(X)|\mathcal{F}_n] = 2^n \int_{X_n}^{X_n+2^{-n}} g(u)du.$$

5. Conclure que pour tout $x \in [0,1]$, $f(x) = f(0) + \int_0^x g(u)du$.

   La dernière égalité nous dit que, presque sûrement :

$$f(X_n + 2^{-n}) - f(X_n) = \int_{X_n}^{X_n+2^{-n}} g(u)du.$$

   Ainsi, pour tout point de la forme $k2^{-n}$, on a

$$f((k+1)2^{-n}) - f(k2^{-n}) = \int_{k2^{-n}}^{(k+1)2^{-n}} g(u)du,$$

   d'où en sommant, pour tout réel dyadique x de l'intervalle $[0,1]$:

$$f(x) - f(0) = \int_0^x g(z)dz.$$

   Le cas d'un point x générique s'obtient par approximation par les dyadiques grâce à la continuité de f et de l'intégrale.