Université de Rennes 1 — Master 1 Mathématique

Martingales et chaînes de Markov — année 2013-2014

Élèments de correction du contrôle continu # 3

Durée 1 heure, aucun document n'est autorisé.

Questions de cours :
On considère une chaîne de Markov $(X_n)_{n\geq 0}$ de matrice de transition Q sur un espace d'état E au plus dénombrable. On note E_T (resp. E_R) l'ensemble des états transitoires (resp. récurrents).

1. Donner deux définitions équivalentes du fait que $x \in E_T$.
L'état x est transitoire si et seulement si $\mathbb{P}_x(T_x < \infty) < 1$ où T_x désigne le premier temps de retour de la chaîne en x, $T_x := \inf\{n \geq 1,\, X_n = x\}$, ou encore, si et seulement si $G(x,x) = \sum_{n\in\mathbb{N}} Q_n(x,x) < \infty$.
2. Sous quelles conditions la chaîne est-elle dite irréductible récurrente apériodique ?
La chaîne est irréductible si tous les états communiquent, c'est-à -dire si pour tous $(x,y) \in E^2$ on a $G(x,y) > 0$. Dans ce cas, on sait d'après le cours que tous les états sont de même nature ($E_R = E$ ou $E_R = \emptyset$) et de même période. La chaîne sera récurrente si $E_R = E$ et apériodique si tous ces états sont de période 1, la période d'un état x étant définie par $\mathrm{pgcd}\{n \geq 1,\, Q_n(x,x) > 0\}$.

Exercice 1 *Une chaîne à trois états*
On considère une chaîne de Markov d'espace d'états $E := \{1,2,3\}$ et de matrice de transition

$$Q := \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Quels sont les états récurrents ? Transients ? Les lois stationnaires ?
La chaîne est irréductible car $Q(1,2) > 0$, $Q(1,3) > 0$, $Q(2,1) > 0$, $Q(2,3) > 0$, et $Q(3,1) > 0$, $Q_2(3,2) > 0$. L'espace d'états étant fini, la chaîne est récurrente positive. Ainsi la chaîne admet une unique loi stationnaire π, que l'on détermine en résolvant $\pi Q = \pi$. On trouve $\pi = \frac{1}{9}(\,4 \;\; 2 \;\; 3\,)$.
2. Pour $x \in E$, on note T_x le temps d'atteinte de x. Calculer $\mathbb{E}_x[T_x]$.
Par le cours, $\mathbb{E}_x[T_x] = \pi_x^{-1}$ où π est la loi invariante déterminée en question 1.
3. Calculer la période de chaque état. Montrer que Q^4 a tous ses coefficients positifs. En déduire la limite de $Q_n(x,y)$ pour tout couple $(x,y) \in E^2$.
La chaîne étant irréductible, il suffit de calculer la période d'un état, par exemple celle de 1. Or $Q_2(1,1) > 0$ avec le chemin $(1 \to 3 \to 1)$ et $Q_3(1,1) > 0$ avec le chemin $(1 \to 2 \to 3 \to 1)$, la chaîne est donc apériodique. On vérifie facilement que Q^4 a tous ses élements strictement positifs, de sorte que Q^n également pour tout $n \geq 4$. Le cours s'applique alors et montre que Q_n tend quand $n \to \infty$ vers la matrice 3×3 dont les lignes sont toutes identiques et égales à π. Par conséquent, pour tout $(x,y) \in E^2$, $Q_n(x,y) \to \pi_y$.

Exercice 2 *Exemple de classification*

On considère une chaîne de Markov d'espace d'états $E := \{1,2,3,4\}$ et de matrice de transition

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Déterminer

1. les états transitoires et récurrents de la chaîne ;

   Les classes de la chaîne sont les suivantes : $\{1\}$, $\{2,3\}$ et $\{4\}$. Les classes $\{1\}$ et $\{4\}$ sont clairement récurrentes puisque pour $x \in \{1,4\}$ on a $\mathbb{P}_x(T_x < \infty) = 1$. La classe $\{2,3\}$ est quant à elle transiente. En effet, si elle était récurrente, 2 serait récurrent et on aurait $N_2 = +\infty$ $\mathbb{P}_2-$p.s. où $N_2 = \sum_{n\geq 0} 1_{X_n=2}$. Mais $N_2 = 1$ sur l'évènement $\{X_1 = 1\}$ qui est de mesure > 0 puisque $\mathbb{P}_2(X_1 = 1) = Q(2,1) = 1/2 > 0$.

2. la probabilité d'absorption en $\{4\}$ partant de 2 ;

   Pour $i \in E$, soit $h_i = \mathbb{P}_i(T_4 < \infty)$ où $T_4 := \inf\{n \geq 0, X_n = 4\}$. On cherche la valeur de h_2. D'après le cours, $(h_i)_{i\in E}$ est la solution minimale positive de

   $$\begin{cases} h_4 &= 1, \\ h_i &= \sum_{j\in E} Q(i,j)h_j, \quad i \neq 4. \end{cases}$$

   Cela donne le système

   $$\begin{cases} h_1 &= h_1 \\ h_2 &= h_1/2 + h_3/2 \\ h_3 &= h_2/2 + h_4/2 \\ h_4 &= 1 \end{cases}$$

   où h_1 joue manifestement le rôle d'un paramètre ; on choisit donc $h_1 = 0$ par minimalité. On déduit

   $$\begin{cases} h_1 &= 0 \\ h_2 &= 1/3 \\ h_3 &= 2/3 \\ h_4 &= 1. \end{cases}$$

   On a donc $h_2 = 1/3$.

3. le temps d'absorption dans $\{1,4\}$ partant de 2.

   Pour $i \in E$, soit $k_i = \mathbb{E}_i[T]$ où $T := \inf\{n \geq 0, X_n \in \{1,4\}\}$. On cherche la valeur de k_2. D'après le cours, $(k_i)_{i\in E}$ est la solution minimale positive de

   $$\begin{cases} k_1 &= k_4 = 0, \\ k_i &= 1 + \sum_{j\in\{2,3\}} Q(i,j)k_j, \quad i \notin \{1,4\}. \end{cases}$$

   On trouve

   $$\begin{cases} k_1 &= 0 \\ k_2 &= 1 + k_3/2 \\ k_3 &= 1 + k_2/2 \\ k_4 &= 0 \end{cases} \iff \begin{cases} k_1 &= 0 \\ k_2 &= 2 \\ k_3 &= 2 \\ k_4 &= 0, \end{cases}$$

   d'où l'on déduit $k_2 = 2$.