Éléments de correction du contrôle continu # 2

Exercice 1 *face à face au casino*
L'équation (1) s'écrit encore, pour toute fonction borélienne bornée $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$:

$$\mathbb{E}(f(X_{n+1})|\mathcal{F}_n) = X_n f\left(\frac{1+X_n}{2}\right) + (1-X_n) f\left(\frac{X_n}{2}\right). \tag{1}$$

1. La suite (X_n) est bornée, en particulier intégrable et elle est adaptée à sa filtration naturelle. Par ailleurs, si on pose $f(x) = x$ dans (1), on obtient :
$$\mathbb{E}(X_{n+1}|\mathcal{F}_n) = X_n \times \left(\frac{1+X_n}{2}\right) + (1-X_n) \times \left(\frac{X_n}{2}\right) = X_n.$$
2. Par définition, $X_n \in [0,1]$ presque sûrement pour tout n, donc (X_n) est une martingale bornée dans $\mathbb{L}^2$ et, par le théorème de convergence des martingales, X_n converge *p.s.* et dans $\mathbb{L}^2$ vers une variable $Z \in [0,1]$.
3. Si on pose $f(x) = x^2$ dans (1) et on prend l'espérance, on obtient
$$\mathbb{E}[X_{n+1}^2] = \mathbb{E}\left[X_n \times \frac{(1+X_n)^2}{4} + (1-X_n) \times \frac{X_n^2}{4}\right] = \frac{\mathbb{E}[X_n + 3X_n^2]}{4}.$$
Quand n tend vers l'infini, par convergence dominée (convergence $\mathbb{L}^2$ et $\mathbb{L}^1$) on trouve :
$$\mathbb{E}[Z^2] = \frac{\mathbb{E}[Z + 3Z^2]}{4}, \quad i.e. \ \mathbb{E}[Z^2] = \mathbb{E}[Z] = \mathbb{E}[X_0] = p.$$
4. Pour une telle variable W, on a $W(1-W) \geq 0$ et $\mathbb{E}(W(1-W)) = 0$, on en déduit que $W(1-W) = 0$ presque sûrement et donc $W \in \{0,1\}$ presque sûrement, *i.e.* W est une variable de Bernoulli de paramètre $\mathbb{E}[W]$. Or on a vu que $\mathbb{E}(Z^2) = \mathbb{E}(Z)$, c'est-à-dire $\mathbb{E}(Z(1-Z)) = 0$. Puisque $Z \in [0,1]$ comme limite de $X_n \in [0,1]$, on conclut que Z est une variable de Bernoulli de paramètre $\mathbb{E}(Z) = p$.
5. D'après l'équation (1) , on a :
$$\mathbb{P}\left(X_{n+1} = \frac{1+X_n}{2}\Big|\mathcal{F}_n\right) = X_n, \quad \mathbb{P}\left(X_{n+1} = \frac{X_n}{2}\Big|\mathcal{F}_n\right) = 1 - X_n,$$
autrement dit, la loi conditionnelle de X_{n+1} sachant $\mathcal{F}_n$ est donnée par
$$\mathbb{P}(X_{n+1} \in dt|\mathcal{F}_n) = X_n \delta_{\frac{1+X_n}{2}}(dt) + (1-X_n)\delta_{\frac{X_n}{2}}(dt).$$
On en déduit que la loi conditionnelle de Y_n sachant $\mathcal{F}_n$ est la loi d'une variable de Bernoulli de paramètre X_n et en prenant l'espérance :
$$\mathbb{P}(Y_n = 0) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(\mathbb{1}_{Y_n=0}|\mathcal{F}_n)) = \mathbb{E}(1-X_n) = 1-p,$$
$$\mathbb{P}(Y_n = 1) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(\mathbb{1}_{Y_n=1}|\mathcal{F}_n)) = \mathbb{E}(X_n) = p,$$
i.e. Y_n est une variable de Bernoulli de paramètre p.

6. Puisque X_n tend vers Z presque sûrement, $Y_n = 2X_{n+1} - X_n$ converge vers $2Z - Z = Z$ presque sûrement. Or, Y_n prend seulement les valeurs 0 et 1 *p.s.*. Donc *p.s.* il existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ aléatoire tel que $Y_n = Z$ pour $n \geq n_0$. Donc $\liminf_n G_n = \{Z = 1\}$ et $\liminf_n H_n = \{Z = 0\}$. On peut voir que les variables (Y_n) ne sont pas indépendantes de plusieurs façons. Par exemple, si c'était le cas, puisque $\sum_n \mathbb{P}(Y_n = 1) = \sum_n p = +\infty$, alors par le deuxième lemme de Borel-Cantelli on aurait $\mathbb{P}(\limsup_n \{Y_n = 1\}) = 1$; mais Y_n converge *p.s.* et donc $\lim_n Y_n = 1$ presque sûrement ce qui contredit le résultat du point 4. On peut aussi remarquer que la limite Z n'est pas une variable constante *p.s.* (loi du zéro-un). On peut aussi calculer explicitement :

$$\mathbb{P}(Y_0 = 1, Y_1 = 1) = \mathbb{P}(Y_0 = 1)\mathbb{P}(Y_1 = 1 | Y_0 = 1) = p \times \frac{1+p}{2}$$

qui est différent de $\mathbb{P}(Y_0 = 1)\mathbb{P}(Y_1 = 1) = p^2$.
7. La variable Y_n est l'indicatrice de l'évènement "le joueur gagne la $(n+1)-$ième partie". À chaque partie le joueur a une probabilité p de gagner et $1-p$ de perdre. Presque sûrement, après un certain nombre de parties, soit le joueur gagnera toutes les parties successives, soit il les perdra toutes. Si le jeu continue indéfiniment, le joueur gagnera le capital entier ou perdra tout ; le premier évènement a probabilité p et le second $1-p$.

Exercice 2 *La prochaine est rouge*

1. On remarque tout d'abord qu'après avoir retourné n cartes, le jeu en contient encore $52-n$, et si $R_n = j$, alors le jeu contient j cartes rouges. On a donc

$$\mathbb{P}(A_{n+1} | R_n = j) = \frac{j}{52-n}, \quad \text{pour } j \in \{0, \ldots, 26\}.$$

La loi conditionnelle de R_{n+1} sachant R_n est concentrée sur l'ensemble $\{R_n, R_n - 1\}$ et

$$\mathbb{P}(R_{n+1} = R_n - 1 | R_n) = \mathbb{P}(A_{n+1} | R_n) = \frac{R_n}{52-n}, \quad \mathbb{P}(R_{n+1} = R_n | R_n) = 1 - \frac{R_n}{52-n}.$$

Par ailleurs $\mathbb{P}(R_{n+1} = j | R_n) = \mathbb{P}(R_{n+1} = j | \mathcal{F}_n)$, donc $\mathbb{E}(R_{n+1} | \mathcal{F}_n) = \mathbb{E}(R_{n+1} | R_n)$ avec

$$\mathbb{E}(R_{n+1} | R_n) = R_n - \frac{R_n}{52-n}.$$

2. La suite $X_n := \mathbb{P}(A_{n+1} | R_n)$ est bornée donc intégrable, elle est bien sûr adaptée à $\mathcal{F}_n$ et

$$\mathbb{E}(X_{n+1} | \mathcal{F}_n) = \frac{1}{52-n-1} \mathbb{E}(R_{n+1} | \mathcal{F}_n) = \frac{1}{52-n-1} \times \left(R_n - \frac{R_n}{52-n} \right) = X_n.$$

3. Le joueur peut décider de dire la phrase fatidique seulement sur la base des cartes déjà retournées, c'est-à-dire que $\{\tau = n\}$ est inclus dans $\sigma(R_0, \ldots, R_n) = \mathcal{F}_n$ et τ est donc un temps d'arrêt. Toute stratégie correspond à choisir un tel temps d'arrêt. La probabilité de victoire est

$$\mathbb{P}(A_{\tau+1}) = \sum_{n=0}^{51} \mathbb{P}(\{\tau = n\} \cap A_{n+1}) = \sum_{n=0}^{51} \mathbb{E}(1_{\{\tau=n\}} \mathbb{P}(A_{n+1} | \mathcal{F}_n)) = = \sum_{n=0}^{51} \mathbb{E}(1_{\{\tau=n\}} X_n) = \mathbb{E}(X_\tau).$$

Par le théorème d'arrêt, puisque (X_n) est une martingale et τ est un temps d'arrêt borné ($\tau \leq 51$ *p.s.*), on a $\mathbb{E}(X_\tau) = \mathbb{E}(X_0) = 1/2$. On conclut que toutes les stratégies se valent et que la probabilité de victoire dans ce jeu est toujours égale à $1/2$.