Éléments de correction du contrôle continu # 1

Durée 1 heure, aucun document n'est autorisé.

Exercice 1 *Loi uniforme dans un triangle*
Soient N un entier plus grand que deux et $T := \{(i,j) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N},\ 1 \leq i \leq j \leq N\}$ un "triangle" discret à $N(N+1)/2$ points (faire un dessin). Soit (X,Y) une variable aléatoire à valeurs dans T de loi uniforme, i.e. $\mathbb{P}(X=i, Y=j) = 2/N(N+1)$ pour $1 \leq i \leq j \leq N$.

1. Déterminer les lois marginales de X et Y.
   En sommant sur les possibles, on obtient :
$$\mathbb{P}(Y=j) = \sum_{i=1}^{j} \mathbb{P}(X=i, Y=j) = \frac{2j}{N(N+1)},$$
$$\mathbb{P}(X=i) = \sum_{j=i}^{N} \mathbb{P}(X=i, Y=j) = \frac{2(N+1-i)}{N(N+1)}.$$

2. Déterminer les probabilités conditionnelles $\mathbb{P}(X=i|Y=j)$ et $\mathbb{P}(Y=j|X=i)$.
   D'après la définiton de la probabilité conditionnelle, on a pour $1 \leq i \leq j \leq N$:
$$\mathbb{P}(X=i|Y=j) = \frac{\mathbb{P}(X=i, Y=j)}{\mathbb{P}(Y=j)} = \frac{1}{j},$$
$$\mathbb{P}(Y=j|X=i) = \frac{\mathbb{P}(X=i, Y=j)}{\mathbb{P}(X=i)} = \frac{1}{N+1-i}.$$

3. Déterminer $\mathbb{E}[X|Y]$ puis $\mathbb{E}[X]$ en fonction de $\mathbb{E}[Y]$. De même, déterminer $\mathbb{E}[Y|X]$ puis $\mathbb{E}[Y]$ en fonction de $\mathbb{E}[X]$.
   Pour $1 \leq j \leq N$, on a :
$$\mathbb{E}[X|Y=j] = \sum_{i=1}^{j} i\, \mathbb{P}(X=i|Y=j) = \frac{1}{j} \times \frac{j(j+1)}{2} = \frac{j+1}{2}$$
   et on en déduit que $\mathbb{E}[X|Y] = (Y+1)/2$ puis en prenant l'espérance $\mathbb{E}[X] = (\mathbb{E}[Y]+1)/2$.
   De même, pour $1 \leq i \leq N$:
$$\mathbb{E}[Y|X=i] = \sum_{j=i}^{N} j\, \mathbb{P}(Y=j|X=i) = \frac{1}{N+1-i} \times (N-i+1)\frac{N+i}{2} = \frac{N+i}{2},$$
   d'où $\mathbb{E}[Y|X] = (N+X)/2$ et $\mathbb{E}[Y] = (N+\mathbb{E}[X])/2$.

4. Déduire des questions précédentes $\mathbb{E}[X]$ et $[Y]$.
   Il s'agit de résoudre le système
$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbb{E}[X] = \frac{\mathbb{E}[Y]+1}{2} \\ \\ \mathbb{E}[Y] = \frac{N+\mathbb{E}[X]}{2} \end{array} \right. , \quad \text{on trouve} \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{E}[X] = \frac{N+2}{3} \\ \\ \mathbb{E}[Y] = \frac{2N+1}{3} \end{array} \right. .$$

Soit maintenant (U, V) un couple de variables aléatoires admettant la densité suivante par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^2$:

$$f(u,v) = \begin{cases} 2 & \text{si} \quad 0 \leq u \leq v \leq 1, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. Déterminer les densités conditionnelles de U sachant $V = v$ et de V sachant $U = u$.
   Les densités f_U et f_V de U et V sont données par :

$$f_U(u) = \int_u^1 2dv \times \mathbb{1}_{[0,1]}(u) = 2(1-u)\mathbb{1}_{[0,1]}(u),$$

$$f_V(v) = \int_0^v 2du \times \mathbb{1}_{[0,1]}(v) = 2v\mathbb{1}_{[0,1]}(v).$$

   On a alors :

$$f_{U|V=v}(u) = \frac{f(u,v)}{f_V(v)} = \frac{1}{v}\mathbb{1}_{0 \leq u \leq v}$$

$$f_{V|U=u}(v) = \frac{f(u,v)}{f_U(u)} = \frac{1}{1-u}\mathbb{1}_{u \leq v \leq 1}.$$

   Autrement dit, les variables conditionnées sont de loi uniforme sur les intervalles où elles sont supportées.

2. En déduire les espérances conditionnelles $\mathbb{E}[X|Y]$ puis $\mathbb{E}[Y|X]$.
   Par le calcul, ou par la dernière remarque, il obtient immédiatement :

$$\mathbb{E}[U|V] = V/2, \qquad \mathbb{E}[V|U] = (1+U)/2.$$

Exercice 2 *Conditionnement gaussien*
Soit $X = (X_1, X_2, X_3)'$ un vecteur gaussien centré de matrice de covariance

$$\Gamma := \begin{pmatrix} 4 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Certaines composantes de X sont-elles indépendantes ? orthogonales ? Si oui, lesquelles ?
   Le vecteur X étant gaussien centré, le fait que $\Gamma_{23} = \Gamma_{32} = 0$ indique que les variables X_2 et X_3 sont de covariance nulle, i.e. orthogonales, i.e. indépendantes.

2. Déterminer la densité du couple (X_2, X_3) ainsi que sa fonction caractéristique.
   D'après le cours, la densité f du couple est donnée par

$$f(x,y) = \frac{1}{2\pi\sqrt{2}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{2} + y^2\right)\right],$$

   et la fonction caractéristique :

$$\phi(x,y) = \exp\left[-\frac{1}{2}\left(2x^2 + y^2\right)\right].$$

3. Sans calcul, déterminer $\mathbb{E}[X_2|X_3]$ et $\mathbb{E}[(X_2-\mathbb{E}[X_2|X_3])^2]$.
   Les variables X_2 et X_3 étant centrées et indépendantes, on a $\mathbb{E}[X_2|X_3]=\mathbb{E}[X_2]=0$ et $\mathbb{E}[(X_2-\mathbb{E}[X_2|X_3])^2]=\mathbb{E}[X_2^2]=\mathrm{var}(X_2)=2$.
4. Calculer $\mathbb{E}[X_1|X_2,X_3]$ et $\mathbb{E}[X_1|X_3]$.
   Le vecteur X étant centré, d'après le cours, on a

$$\mathbb{E}[X_1|X_2,X_3]=\Gamma_{X_1,(X_2,X_3)}\Gamma^{-1}_{(X_2,X_3)}(X_2,X_3)'=\frac{X_2}{2}-X_3$$

$$\mathbb{E}[X_1|X_3]=\frac{\mathrm{cov}(X_1,X_3)}{\mathrm{var}(X_3)}X_3=-X_3.$$

Exercice 3 *Conditionnement et exponentielle gaussienne*
Soient X et Y deux variables aléatoires réelles indépendantes, Y étant de loi normale $\mathcal{N}(0,1)$.

1. Montrer que les trois propriétés suivantes sont équivalentes :
   (a) $e^{X^2/2}$ est intégrable ;
   (b) e^{XY} est intégrable ;
   (c) $e^{|XY|}$ est intégrable.

   Les variables X et Y étant indépendantes, on a $\mathbb{P}_{(X,Y)}=\mathbb{P}_X\otimes\mathbb{P}_Y$ et

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[e^{XY}] &= \int e^{xy}\mathbb{P}_{(X,Y)}(dx,dy)=\int\left(\int\frac{e^{xy}e^{-y^2/2}}{\sqrt{2\pi}}dy\right)\mathbb{P}_X(dx)\\ &= \int e^{x^2/2}\mathbb{P}_X(dx)=\mathbb{E}[e^{X^2/2}].\end{aligned}$$

   On a donc bien l'équivalence $(a)\iff(b)$. Par ailleurs, on a naturellement $XY\le|XY|$ et $e^{XY}\le e^{|XY|}$ d'où l'implication $(c)\implies(b)$. Enfin, on a

$$\mathbb{E}[e^{|XY|}]=\int_{x\ge 0}\left(\int\frac{e^{x|y|}e^{-y^2/2}}{\sqrt{2\pi}}dy\right)\mathbb{P}_X(dx)+\int_{x<0}\left(\int\frac{e^{-x|y|}e^{-y^2/2}}{\sqrt{2\pi}}dy\right)\mathbb{P}_X(dx),$$

   avec

$$\int\frac{e^{x|y|}e^{-y^2/2}}{\sqrt{2\pi}}dy\le 2e^{x^2/2}\quad\text{et}\quad\int\frac{e^{-x|y|}e^{-y^2/2}}{\sqrt{2\pi}}dy\le 2e^{x^2/2},$$

   d'où la majoration $\mathbb{E}[e^{|XY|}]\le 4\mathbb{E}[e^{X^2/2}]$ et l'implication $(a)\implies(c)$.
2. Montrer que lorsque e^{XY} est intégrable, on a $\mathbb{E}[e^{XY}|X]\ge 1$ presque sûrement.
   La fonction exponentielle étant convexe, d'après l'inégalité de Jensen conditionnelle, presque sûrement, on a

$$\mathbb{E}[e^{XY}|X]\ge e^{\mathbb{E}[XY|X]}$$

   Par ailleurs, comme X et Y sont indépendantes et que Y est centrée

$$\mathbb{E}[XY|X]=X\mathbb{E}[Y|X]=X\mathbb{E}[Y]=0,$$

   d'où la minoration $\mathbb{E}[e^{XY}|X]\ge 1$ p.s.
3. Toujours dans le cas où e^{XY} est intégrable, déterminer $\mathbb{E}[e^{XY}|X]$.
   D'après le cours, les variables X étant Y étant indépendantes, on a $\mathbb{E}[e^{XY}|X]=\varphi(X)$ avec $\varphi(x)=\mathbb{E}[e^{xY}]=e^{x^2/2}$ d'après les calculs effectués à la première question.