

## CONTRÔLE CONTINU # 3

Durée 1 heure, aucun document n'est autorisé.

### Questions de cours :

On considère une chaîne de Markov  $(X_n)_{n \geq 0}$  de matrice de transition  $Q$  sur un espace d'état  $E$  au plus dénombrable. On note  $E_T$  (resp.  $E_R$ ) l'ensemble des états transitoires (resp. récurrents).

1. Donner deux définitions équivalentes du fait que  $x \in E_T$ .
2. Sous quelles conditions la chaîne est-elle dite irréductible récurrente apériodique ?

### Exercice 1 *Une chaîne à trois états*

On considère une chaîne de Markov d'espace d'états  $E := \{1, 2, 3\}$  et de matrice de transition

$$Q := \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Quels sont les états récurrents ? Transients ? Les lois stationnaires ?
2. Pour  $x \in E$ , on note  $T_x$  le temps d'atteinte de  $x$ . Calculer  $\mathbb{E}_x[T_x]$ .
3. Calculer la période de chaque état. Montrer que  $Q^4$  a tous ses coefficients positifs. En déduire la limite de  $Q_n(x, y)$  pour tout couple  $(x, y) \in E^2$ .

### Exercice 2 *Exemple de classification*

On considère une chaîne de Markov d'espace d'états  $E := \{1, 2, 3, 4\}$  et de matrice de transition

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Déterminer

1. les états transitoires et récurrents de la chaîne ;
2. la probabilité d'absorption en  $\{4\}$  partant de 2.
3. le temps d'absorption dans  $\{1, 4\}$  partant de 2.