Université de Rennes 1 — Master 1 Mathématique

Martingales et chaînes de Markov — année 2013-2014

Contrôle continu # 2

Durée 1 heure, aucun document n'est autorisé.

Questions de cours :

1. Donner deux définitions équivalentes de la notion d'uniforme intégrabilité pour une famille de variable aléatoires $(X_i)_{i\in I}$.
2. Si une martingale est bornée dans $\mathbb{L}^p$ avec $p \geq 1$, converge-t-elle dans $\mathbb{L}^p$?

Exercice 1 *face à face au casino*
On considère un jeu de hasard entre un joueur et le croupier d'un casino. Le capital total en jeu est 1 : après la $n-$ième partie le capital du joueur est $X_n \in [0,1]$ et le capital du croupier est $1-X_n$. Au début du jeu, le capital du joueur est une constante $X_0 = p \in]0,1[$ et le capital du croupier est $1-p$.

La règle du jeu la suivante, après les n premières parties, la probabilité pour le joueur de gagner la $(n+1)-$ième partie est X_n, et la probabilité de perdre est $1-X_n$. Si le joueur gagne, il obtient la moitié du capital du croupier ; s'il perd, il cède la moitié de son capital au croupier. Ainsi, pour toute fonction borélienne bornée $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, on a :

$$\mathbb{E}(f(X_{n+1})|\mathcal{F}_n) = X_n \times f\left(X_n + \frac{1-X_n}{2}\right) + (1-X_n) \times f\left(\frac{X_n}{2}\right), \tag{1}$$

où $(\mathcal{F}_n)$ est la filtration naturelle de la suite (X_n).

1. Montrer que (X_n) est une martingale.
2. Montrer que (X_n) converge *p.s.* et dans $\mathbb{L}^2$ vers une variable Z.
3. Montrer que $\mathbb{E}(X_{n+1}^2) = \mathbb{E}(3X_n^2 + X_n)/4$. En déduire que $\mathbb{E}(Z^2) = \mathbb{E}(Z) = p$.
4. Prouver que toute variable aléatoire W, telle que $0 \leq W \leq 1$ et $\mathbb{E}(W(1-W)) = 0$, est une variable de Bernoulli. En déduire la loi de Z.
5. Pour tout $n \geq 0$, on pose $Y_n := 2X_{n+1} - X_n$. Déterminer les probabilités $\mathbb{P}(Y_n = 0|\mathcal{F}_n)$ et $\mathbb{P}(Y_n = 1|\mathcal{F}_n)$. En déduire la loi de Y_n.
6. On considére les évènements $G_n := \{Y_n = 1\}$ et $H_n := \{Y_n = 0\}$. Montrer que, lorsque n tend vers l'infini, Y_n converge presque sûrement vers la variable Z. En déduire que
$$\mathbb{P}\left(\liminf_{n\to+\infty} G_n\right) = p, \qquad \mathbb{P}\left(\liminf_{n\to+\infty} H_n\right) = 1-p.$$
Les variables $(Y_n)_{n\geq 0}$ sont-elles indépendantes ?
7. Quelle est l'interprétation des résultats des points 4, 5 et 6 en termes de victoire/perte du joueur ?

Exercice 2 *(exercice facultatif)*
On prend un jeu de 52 cartes, dont on retourne les cartes une à une. Le joueur peut, une et une seule fois au cours du jeu, dire “la prochaine est rouge” ; il gagne si la carte suivante est rouge, sinon il perd.

On se demande quelles sont les stratégies de jeu qui optimisent la probabilité de victoire. Pour $n = 0, \dots, 51$, on note R_n le nombre de cartes rouges encore dans le jeu après avoir retourné n cartes. Soit A_n l'évènement “la $n-$ième carte retournée est rouge”.

1. Calculer $\mathbb{P}(A_{n+1}|R_n = j)$, pour $j \in \{2, \dots, 26\}$ et $n \in \{0, \dots, 50\}$.
2. Calculer $\mathbb{P}(R_{n+1} = j|R_n) = \mathbb{P}(R_{n+1}|\mathcal{F}_n)$, pour $n \in \{0, \dots, 50\}$ et $j \in \{0, \dots, 26\}$, où on a posé $\mathcal{F}_n := \sigma(R_0, \dots, R_n)$.
3. Montrer que, pour $n \in \{0, \dots, 50\}$,
$$\mathbb{E}(R_{n+1}|\mathcal{F}_n) = R_n - \frac{R_n}{52 - n}.$$
4. Montrer que $X_n := R_n/(52 - n)$, $n = 0, \dots, 51$, est une martingale par rapport à la filtration $(\mathcal{F}_n)$ et que $X_n = \mathbb{P}(A_{n+1}|\mathcal{F}_n)$.
5. On définit $\tau \in \{0, \dots, 51\}$ le temps où le joueur dit “la prochaine est rouge” avant de retourner la $(n + 1)-$ième carte. Montrer que τ est un temps d'arrêt et que la probabilité de victoire est $\mathbb{E}(X_\tau)$. Montrer que, pour toute stratégie, la probabilité p de victoire dans ce jeu est toujours la même et calculer p.