Contrôle continu # 1

Durée 1 heure, aucun document n'est autorisé.

Exercice 1 *Loi uniforme dans un triangle*
Soient N un entier plus grand que deux et $T := \{(i,j) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N},\ 1 \leq i \leq j \leq N\}$ un "triangle" discret à $N(N+1)/2$ points (faire un dessin). Soit (X,Y) une variable aléatoire à valeurs dans T de loi uniforme, i.e. $\mathbb{P}(X=i, Y=j) = 2/N(N+1)$ pour $1 \leq i \leq j \leq N$.

1. Déterminer les lois marginales de X et Y.
2. Déterminer les probabilités conditionnelles $\mathbb{P}(X=i|Y=j)$ et $\mathbb{P}(Y=j|X=i)$.
3. Déterminer $\mathbb{E}[X|Y]$ puis $\mathbb{E}[X]$ en fonction de $\mathbb{E}[Y]$. De même, déterminer $\mathbb{E}[Y|X]$ puis $\mathbb{E}[Y]$ en fonction de $\mathbb{E}[X]$. En déduire les valeurs de $\mathbb{E}[X]$ et $[Y]$.

Soit maintenant (U,V) un couple de variables aléatoires admettant la densité suivante par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^2$ (là encore un dessin peut aider) :

$$f(u,v) = \begin{cases} 2 & \text{si} \quad 0 \leq u \leq v \leq 1, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

4. Déterminer les lois conditionnelles de U sachant $V=v$ et de V sachant $U=u$.
5. En déduire les espérances conditionnelles $\mathbb{E}[U|V]$ puis $\mathbb{E}[V|U]$.

Exercice 2 *Conditionnement gaussien*
Soit $X = (X_1, X_2, X_3)'$ un vecteur gaussien centré de matrice de covariance

$$\Gamma := \begin{pmatrix} 4 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Certaines composantes de X sont-elles indépendantes ? orthogonales ? Si oui, lesquelles ?
2. Déterminer la densité du couple (X_2, X_3) ainsi que sa fonction caractéristique.
3. Sans calcul, déterminer $\mathbb{E}[X_2|X_3]$ et $\mathbb{E}[(X_2 - \mathbb{E}[X_2|X_3])^2]$.
4. Calculer $\mathbb{E}[X_1|X_2, X_3]$ et $\mathbb{E}[X_1|X_3]$.

Exercice 3 *Conditionnement et exponentielle gaussienne*
Soient X et Y deux variables aléatoires réelles indépendantes, Y étant de loi normale $\mathcal{N}(0,1)$.

1. Montrer que les trois propriétés suivantes sont équivalentes :
   (a) $e^{X^2/2}$ est intégrable ;
   (b) e^{XY} est intégrable ;
   (c) $e^{|XY|}$ est intégrable.
2. Montrer que lorsque e^{XY} est intégrable, on a $\mathbb{E}[e^{XY}|X] \geq 1$ presque sûrement.
3. Toujours dans le cas où e^{XY} est intégrable, déterminer $\mathbb{E}[e^{XY}|X]$.