Feuille de travaux pratiques # 5

Exercice 1 *Urne d'Ehrenfest*
Soit $d \geq 2$ un entier pair. On considère la chaîne de Markov associée à l'urne d'Ehrenfest, i.e. la chaîne de Markov sur $E = \{0, 1, \dots, d\}$ de matrice de transition

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \frac{1}{d} & 0 & \frac{d-1}{d} & 0 & \dots & \vdots \\ 0 & \frac{2}{d} & 0 & \frac{d-2}{d} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \dots & 0 & \frac{d-1}{d} & 0 & \frac{1}{d} \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Comment saisir la matrice Q en `Scilab` sans faire de boucle ? On pourra consulter l'aide de la commande `diag`.
2. Vérifier numériquement que la loi binomiale $\mathcal{B}(d, 1/2)$ satisfait l'équation $\pi Q = \pi$. On pourra, à l'aide de la commande `binomial(d,k)`, créer le vecteur ligne
$$\left(\binom{d}{0}\frac{1}{2^d}, \binom{d}{1}\frac{1}{2^d}, \dots, \binom{d}{d-1}\frac{1}{2^d}, \binom{d}{d}\frac{1}{2^d}\right).$$
3. En utilisant la fonction prédéfinie `grand(n,‘‘markov’’, Q, 1)`, écrire un programme qui génère et trace une trajectoire de cette chaîne.
4. En prenant $d = 10$, illustrer le théorème ergodique par simulation i.e. illustrer le fait que, pour $\ell \in \{0, \dots, d\}$, presque sûrement, lorsque n tend vers l'infini :
$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \mathbb{1}_{Xk=\ell} \longrightarrow \pi(\{\ell\}).$$
5. Comme dans le cours, on note $T_\ell := \inf\{n \geq 1, X_n = \ell\}$. Toujours dans le cas $d = 10$, comparer par simulation les quantités $\mathbb{E}_\ell(T_\ell)$ et $\pi(\{\ell\})$.
6. Vérifier enfin par simulation les relations établies en TD : $\mathbb{E}_0[T_0] = 2^d$ et $\mathbb{E}_{d/2}[T_{d/2}] \approx \sqrt{\pi d/2}$.
7. Comment simuler les trajectoires d'une chaîne d'Ehrenfest lorsque le nombre de particules atteint $d = 1000000$?
8. Que représente la quantité X_n/d ? Peut-on relier cette quantité à une grandeur physique macroscopique facilement mesurable ?
9. Supposons que le système soit à l'équilibre, c'est-à-dire que X soit de loi binomiale $\mathcal{B}(d, 1/2)$. Alors lorsque d est grand, en vertu du théorème limite central, $Y = X/d$ vérifie
$$\mathbb{P}\left(|Y - 1/2| \geq \frac{x}{2\sqrt{d}}\right) \approx 2(1 - \Phi(x)) \leq \frac{2}{x\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}.$$

où $\Phi(x) := \int_{-\infty}^{x} \frac{e^{-y^2/2}}{\sqrt{2\pi}} dy$. En effet, Y a la même loi que $d^{-1}\sum_{i=1}^{d} Y_i$ où les variables Y_i sont indépendantes et de même loi de Bernoulli $\mathcal{B}(1/2)$, on a donc

$$\mathbb{P}\left(|Y - 1/2| \geq \frac{x}{2\sqrt{d}}\right) = \mathbb{P}\left(\frac{\sqrt{d}}{\sqrt{1/4}}\left|1/d\sum_{i=1}^{d} Y_i - 1/2\right| \geq x\right) \approx 2(1-\Phi(x)).$$

Proposer des applications numériques percutantes de ce résultat.

10. Pour d assez grand, tracer l'évolution de X_n/d et matérialiser la zone où, d'après la question précédente, cette proportion a une grande chance de se trouver.

Exercice 2 *Marche aléatoire à boucles effacées*
Voici un algorithme qui à partir d'une réalisation de la marche aléatoire simple $(S_0, S_1, \ldots, S_n)$ en dimension deux, fournit son analogue à boucles effacées :

$$\begin{cases} \text{on initialise } i_0 = \max\{i,\ S_i = S_0\}, \\ \text{puis tant que } S_{i_j} \neq S_n, \text{ on pose} \\ \qquad i_{j+1} = \max\{i, S_i = S_{i_j}\} + 1, \\ \text{enfin, on pose } J = \min\{j, S_{i_j} = S_n\}. \end{cases}$$

La marche à boucles effacées est alors donnée par $LE(S) := (S_{i_0}, S_{i_1}, \ldots, S_{i_J})$.

1. Écrire une fonction `marche2(n)` qui étant donné l'entier n renvoie les coordonnées d'une marche aléatoire symétrique en dimension deux, issue de zéro et de longueur n.
2. Écrire une procédure qui, à partir d'une réalisation de la fonction `marche2`, renvoie lez coordonnées de la marche à boucles effacées correspondante.
3. Représenter sur une même figure une réalisation de la marche aléatoire simple et de sa version à boucles effacées.
4. Que peut-on dire de la longueur de la trajectoire à boucles effacées comparée à celle de la trajectoire initiale ? À partir des procédures ci-dessus, tracer une trajectoire de la marche aléatoire à boucles effacées (on note N la longueur de la trajectoire) ainsi que les cercles de rayon $\sqrt{N}$ et $N^{4/5}$ centrés en l'origine. Quel est le cercle qui semble le mieux approcher la distance typique entre l'origine et la fin de la marche ?

   On montre que pour une marche à boucles effacées, la distance typique est bien de l'ordre de $N^{4/5}$, contrairement au cas d'une marche simple où elle est de l'ordre $\sqrt{N}$. La limite d'échelle de la marche à boucles effacées n'est pas le mouvement brownien mais un autre processus appelée SLE (pour Schramm-Loewner-Evolution) d'indice 2.