Feuille de travaux pratiques # 3

Exercice 1 *Arbres de Galton-Watson géométriques*
On rappelle que la loi géométrique de paramètre $p \in]0,1[$ sur $\mathbb{N}$ est la loi $P = \sum_{i \geq 0} p\, q^i \delta_i$ où l'on a posé $q := 1-p$. Soit $(X_{n,k})_{n\geq 1, k\geq 1}$ une famille de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées de loi P. On définit par récurrence une suite $(Z_n)_{n\geq 0}$ telle que $Z_0 := 1$ et pour $n \geq 0$:

$$Z_{n+1} := \sum_{k=1}^{Z_n} X_{n+1,k}.$$

La suite Z_n représente le nombre d'individus à la génération n d'un arbre de Galton-Watson de loi de reproduction P. On adopte ici la convention $\sum_{\varnothing} = 0$ de sorte que si $Z_n = 0$ alors $Z_{n+1} = 0$. On désigne par $T := \inf\{n \geq 0,\, Z_n = 0\} \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$ le temps d'extinction de l'arbre. On note $m := \mathbb{E}[Z_1]$ et $\sigma^2 = \mathbb{E}[Z_1^2] - \mathbb{E}[Z_1]^2 \in \mathbb{R}_+$.

1. Écrire un programme qui prend en entrée un entier $n \in \mathbb{N}$, le paramètre p, et qui génère et trace une trajectoire $(Z_k)_{k=0\ldots n}$.
2. À n fixé, utiliser la méthode de Monte Carlo pour vérifier numériquement que l'on a bien $\mathbb{E}(Z_n) = m^n$.
3. On rappelle que la probabilité d'extinction $\mathbb{P}(T < +\infty)$ est la plus petite solution dans $[0,1]$ de l'équation de point fixe $g(s) = s$ où g est la fonction génératrice de la loi de reproduction. Estimer numériquement cette probabilité et confronter votre résultat avec le résultat théorique vu en TD.
4. Mettre en évidence la convergence de la martingale $Y_n := Z_n/m^n$.
5. On cherche maintenant à préciser ce comportement asymptotique de Z_n dans les cas critique et sur-critique. On suppose tout d'abord que $m = 1$ et $\sigma < +\infty$. Par la méthode de Monte Carlo, mettre numériquement en évidence les fait suivants :
   (a) $\lim_{n\to+\infty} n\mathbb{P}(Z_n > 0) = 2/\sigma^2$;
   (b) $\mathcal{L}(Z_n/n | Z_n > 0)$ tend lorsque n tend vers l'infini vers la loi exponentielle $\mathcal{E}(2/\sigma^2)$.
6. On suppose maintenant que $m > 1$ et $\sigma < +\infty$. On a vu que dans ce cas, (Y_n) converge presque sûrement et dans $\mathbb{L}^2$ vers une variable positive Y_∞. Vérifier numériquement que $\mathbb{E}[Y_\infty] = 1$ et $\mathrm{var}(Y_\infty) = \sigma^2/(m^2 - m)$.

Exercice 2 *Modèle de Wright-Fisher*
Soient k et N deux entiers tels que $0 < k < N$. On définit par récurrence une suite de variables $(X_n^N)_{n\geq 0}$ de la façon suivante : $X_0^N := k$ et pour pour tout $n \geq 0$ et $i \in \{0, \dots, N\}$, la loi de X_{n+1}^N sachant que $X_n^N = i$ est la loi binomiale $\mathcal{B}(N, i/N)$.

1. Écrire un programme qui prend en entrée les entiers k, N, n et qui génère et trace une trajectoire $(X_m^N)_{m=0\dots n}$.
2. Mettre en évidence la convergence presque sûre de la suite $(X_n^N)_{n\geq 0}$ vers une variables X_∞^N à valeurs dans $\{0, N\}$.
3. Estimer les probabilités de sortie $\mathbb{P}(X_\infty^N = 0)$ et $\mathbb{P}(X_\infty^N = N)$.