Feuille d'exercices # 9

Exercice 1 *Questions "simples" sur la classification des états*
Soit $(X_n)_{n\geq 0}$ une chaîne de Markov de matrice de transition Q à valeurs E au plus dénombrable. On adopte les notations du cours en particulier $N_y := \sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{1}_{X_n=y}$ et $G(x,y) := \mathbb{E}_x[N_y]$.

1. Donner un exemple où l'ensemble des points visités par la chaîne issue de x n'est pas déterministe, i.e. constant *p.s.* ;
2. Donner un exemple où, sans que x soit récurrent, sous $\mathbb{P}_x$, l'ensemble des points visités par la chaîne est *p.s.* toujours le même. Donner un exemple où, de plus, l'ordre des 3 premiers points visités en partant de x n'est pas déterministe.
3. Pour $x, y \in E$, a-t-on : (y récurrent et $\exists n$ tel que $Q_n(x,y) > 0) \Longrightarrow N_y = +\infty$ $\mathbb{P}_x - p.s.$?
4. Donner un exemple où il existe n tel que $Q_n(x,y) > 0$ mais pour tout p, $Q_p(y,x) = 0$.
5. Montrer que pour $x, y \in E$, $(G(x,y) = +\infty) \Longrightarrow y$ récurrent. La réciproque est-elle vraie ?
6. Peut-on avoir $0 < G(x,y) < +\infty$ avec y récurrent ?
7. Si $G(x,y) = +\infty$, quelles valeurs peut prendre $G(y,x)$?
8. On suppose que pour tout $x \in E$, l'ensemble $V_x = \{y \in E | \exists n \geq 0,\ Q_n(x,y) > 0\}$ est fini. Montrer qu'il existe des états récurrents.
9. On suppose qu'il existe un état $x_0 \in E$ tel que pour tout $x \in E$, on a $\sum_n Q^n(x_0,x) > 0$ et $\mathbb{P}_x(T_{x_0} < +\infty) = 1$ où T_{x_0} est le temps d'atteinte de x_0. Est-ce que la chaîne est récurrente ?

Exercice 2 *Retour sur la chaîne à deux états*
Pour $p \in [0,1]$ et $q \in [0,1]$, on considère une chaîne de Markov d'états $\{0,1\}$ et de matrice de transition

$$Q := \begin{pmatrix} p & 1-p \\ 1-q & q \end{pmatrix}.$$

1. Sous quelles conditions la chaîne est-elle apériodique irréductible ? Quelles sont les lois stationnaires ?
2. Que se passe-t-il lorsque la chaîne n'est pas irréductible ou périodique ? Quels sont alors les états récurrents et transients ? Quelles sont les lois stationnaires ?

Exercice 3 *Classification des états dans le modèle de Wright-Fisher*
Soient k et N deux entiers tels que $0 < k < N$. On considère la chaîne de Markov $(X_n^N)_{n\geq 0}$ à valeurs dans $E := \{0, \ldots, N\}$, issue de $X_0^N := k$ et dont la matrice de transition est donnée par :

$$Q_{ij} = \mathbb{P}(X_{n+1}^N = j | X_n^N = i) = \binom{N}{j} \left(\frac{i}{N}\right)^j \left(1 - \frac{i}{N}\right)^{N-j}.$$

1. Déterminer les états récurrents et transitoires de la chaîne.
2. Même question si on considère le modèle "avec mutation", c'est-à-dire la chaîne $(\widetilde{X}_n^N)_{n\geq 0}$ dont la matrice de transition est

$$\widetilde{Q}_{ij} = \binom{N}{j} \left((1-u)\frac{i}{N} + u\left(1 - \frac{i}{N}\right)\right)^j \left((v\frac{i}{N} + (1-v)\left(1 - \frac{i}{N}\right)\right)^{N-j},$$

où $(u,v) \in]0,1[^2$ sont les taux de mutations.

Exercice 4 *Pour se faire la main*
Sur les espaces d'états $\{1,2,3,4\}$ et $\{1,2,3,4,5\}$ respectivement, on considère des chaînes de Markov de matrices de transitions respectives :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/4 & 1/4 & 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

Déterminer les états transitoires et les classes de récurrence de ces chaînes.

Exercice 5 *Pour se faire la deuxième main*

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & * & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & * & * & 0 & * & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & * & 0 \\ * & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & * & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & * & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & * & 0 & 0 & 0 & * & * & 0 & 0 \\ 0 & 0 & * & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & * & 0 & 0 & 0 & 0 & * \end{pmatrix}$$

Sur l'espace d'états $E = \{1, 2, \ldots, 9\}$, on considère une chaîne de Markov homogène dont la matrice de transition est de la forme ci-contre, où les inconnues $*$ sont des réels strictement positifs. Déterminer les états absorbants, transitoires et les classes de récurrence de la chaîne. Réindexer l'ensemble E de façon à faire apparaître clairement ces classes.

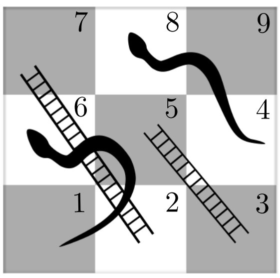
Exercice 6 *Pour se faire la troisième main*
On considère une chaîne de Markov $(X_n)_{n\geq 0}$ à valeurs dans $E = \{1, 2, \ldots, 6\}$ et de matrice de transition Q :

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/5 & 2/5 & 2/5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/6 & 1/3 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1/4 & 0 & 3/4 \end{pmatrix}.$$

Déterminer

1. Déterminer quels sont les états transoires et les états récurrents.
2. Calculer les probabilités d'absorption dans les classes de récurrence.
3. Déterminer les mesures invariantes de la chaîne.

Exercice 7 *Serpents et échelles*



On joue au jeu suivant : un joueur débute à la case 1 et à chaque temps n, lance une pièce équilibrée. Selon le résultat, il avance d'une ou deux cases sur le plateau de jeu. S'il arrive au pied d'une échelle, il grimpe en haut de l'échelle ; s'il arrive sur la tête d'un serpent, il descend à la queue. Le but est d'atteindre la case 9.

1. Combien de tours en moyenne doit-on jouer pour terminer le jeu ?
2. Quelle est la probabilité qu'un joueur ayant atteint la case 5 termine le jeu sans retomber à la case 1 ?