Feuille d'exercices # 8

Exercice 1 *Autour de la propriété de Markov simple*
Soit $(X_n)_{n\geq 0}$ une chaîne de Markov sur un espace dénombrable E, de matrice de transition Q. Pour tout $y \in \mathbb{E}$, on note $T_y := \inf\{n \geq 0,\, X_n = y\}$. Établir les relations suivantes :

i) $Q_n(x,y) = \sum_{m=1}^{n} \mathbb{P}_x(T_y = m) Q_{n-m}(y,y)$;

ii) $\mathbb{P}_x(T_y = n+1) = \sum_{z\neq y} Q(x,z)\mathbb{P}_z(T_y = n)$;

iii) $\mathbb{P}_x(T_y < +\infty) = Q(x,y) + \sum_{z\neq y} Q(x,z)\mathbb{P}_z(T_y < +\infty)$.

Exercice 2 *Niveaux d'une marche aléatoire simple*
Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de loi uniforme sur $\{-1,+1\}$. On pose $S_0 = 0$ et pour $n \geq 1$: $S_n := \sum_{k=1}^{n} X_k$. Pour $a \in \mathbb{N}$, on note $T_a := \inf\{n \geq 0,\, S_n = a\}$ le temps d'atteinte de a par la chaîne $(S_n)_{n\geq 0}$.

1. Montrer que pour tout $a \in \mathbb{N}$, T_a est un temps d'arrêt fini presque sûrement.
2. Montrer que la suite $(T_{a+1} - T_a)_{a\in\mathbb{N}}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées.

Exercice 3 *Excursions d'une marche aléatoire simple*
Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de loi uniforme sur $\{-1,+1\}$. On pose $S_0 := 0$ et pour $n \geq 1$: $S_n := \sum_{k=1}^{n} X_k$. On pose $T_0^0 := 0$ et par récurrence, on définit $T_0^{n+1} := \inf\{n > T_0^n,\, S_n = 0\}$ le temps $n+1-$ième temps de retour en zéro de la chaîne $(S_n)_{n\geq 0}$.

1. Montrer que la loi de $\Delta_0^n := T_0^{n+1} - T_0^n$ ne dépend pas de n.
2. Montrer que les excursions $(S_{T_0^k}, \ldots, S_{T_0^{k+1}})_{k\in\mathbb{N}}$ sont indépendantes et identiquement distribuées.

Exercice 4 *Problème de Dirichlet et propriété de Markov*
Soit $(X_n)_{n\geq 0}$ une chaîne de Markov sur un espace dénombrable E, de matrice de transition Q et issue de x sous $\mathbb{P}_x$. Soient F un sous-ensemble non vide de E et h une fonction positive bornée $h : F \to \mathbb{R}$. On pose $T_F := \inf\{n \geq 0,\, X \in F\}$ le temps d'atteinte de F par la chaîne.

1. Lorsque $(X_n)_{n\geq 0}$ est la marche aléatoire simple sur $E = \mathbb{Z}^2$, identifier l'opérateur $\mathrm{Id} - Q$.
2. Montrer que la fonction $g : E \to \mathbb{R}$ définie par $g(x) := \mathbb{E}_x\left[h(X_{T_F})\mathbb{1}_{T_F<+\infty}\right]$ est solution du problème de Dirichlet discret :
$$\begin{cases} g(x) = Qg(x), & \forall x \in E\backslash F, \\ g(x) = h(x), & \forall x \in F. \end{cases}$$
3. Soit f une autre solution positive du problème ci-dessus. Montrer que pour tout $n \geq 0$, on a l'identité $f(x) = \mathbb{E}_x\left[f(X_{n\wedge T_F})\right]$. En déduire que $f \geq g$.