Feuille d'exercices # 6

Exercice 1 *Thunderbolt*
On peut se demander si les performances sportives seront toujours battues et si oui, à quel rythme. Afin de modéliser cette situation, on considère une suite (X_n) de variables aléatoires indépendantes et de même loi admettant une densité par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^+$. Pour tout entier $n \geq 1$ fixé, on note $(X_{(1)}, \ldots, X_{(n)})$ le vecteur composé des variables X_i réordonnées, c'est-à-dire $X_{(1)} < X_{(2)} < \ldots < X_{(n)}$, et on note R_n le rang relatif de X_n. Il est clair que R_n est une variable aléatoire à valeurs dans $\{1, 2, \ldots, n\}$. Pour $n \geq 1$, on dit qu'il se produit un record à l'instant n si $R_n = 1$. On s'intéresse au comportement asymptotique des suites (Z_n) et (M_n) données par

$$Z_n := \sum_{k=1}^{n} \mathbb{1}_{R_k=1}, \qquad M_n := Z_n - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

La suite (Z_n) compte le nombre de records qui se produisent avant l'instant n. On rappelle que

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \log(n) + \gamma + o(1),$$

où $\gamma \approx 0.5772$ est la constante d'Euler.

1. Montrer que les variables aléatoires $R_1, \ldots, R_n$ sont indépendantes et que pour $1 \leq k \leq n$:
$$\mathbb{P}(R_n = k) = \frac{1}{n}.$$
2. Calculer, pour tout $n \geq 1$, l'espérance et la variance de Z_n.
3. Montrer que (M_n) est une martingale de carré intégrable et calculer son compensateur $\langle M \rangle_n$.
4. En déduire la convergence presque sûre
$$\lim_{n \to +\infty} \frac{M_n}{\log(n)} = 0.$$
5. Montrer également le théorème limite central
$$\frac{M_n}{\sqrt{\log(n)}} \xrightarrow{loi} \mathcal{N}(0, 1).$$
6. En déduire que lorsque n tend vers l'infini, $Z_n/\log(n)$ tend presque vers 1 et que l'on a
$$\frac{Z_n - \log(n)}{\sqrt{\log(n)}} \xrightarrow{loi} \mathcal{N}(0, 1).$$

Exercice 2 *Dérivée de Radon-Nikodym*
Soit $(\Omega, \mathcal{F})$ un espace mesurable. On suppose que la tribu $\mathcal{F}$ est séparable, i.e. engendée par un nombre dénombrable d'évènements $(F_1, F_2, \ldots)$. Pour $n \geq 1$, on pose ainsi $\mathcal{F}_n = \sigma(F_1, \ldots, F_n)$. Soient $\mathbb{P}$ et $\mathbb{Q}$ deux mesures de probabilité sur $(\Omega, \mathcal{F})$ telles que

$$\forall A \in \mathcal{F}, \;\; \mathbb{P}(A) = 0 \Longrightarrow \mathbb{Q}(A) = 0.$$

1. Soit $(A_n)_{n\geq 1}$ une suite d'évènements tels que d'une part $\sum_n \mathbb{P}(A_n) < +\infty$ et d'autre part $\mathbb{Q}(A_n) \geq \alpha > 0$ pour tout $n \geq 0$. On pose $A := \limsup_{n\to+\infty} A_n$. Montrer que $\mathbb{P}(A) = 0$ et $\mathbb{Q}(A) \geq \alpha$.
2. En déduire que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que

$$\forall A \in \mathcal{F}, \;\; \mathbb{P}(A) < \eta \Longrightarrow \mathbb{Q}(A) < \varepsilon.$$

3. Montrer qu'il existe une partition finie $(A_{n,i})_{1\leq i\leq m_n}$ de Ω qui engendre la tribu $\mathcal{F}_n$. On pose

$$X_n = \sum_{k=1}^{m_n} \frac{\mathbb{Q}(A_{n,i})}{\mathbb{P}(A_{n,i})} \mathbb{1}_{A_{n,i}}$$

   où l'on donne la valeur 0 aux rapports de la forme 0/0.
4. Montrer que la suite $(X_n)_{n\geq 1}$ est une martingale relativement à la filtration $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 1}$.
5. Montrer que la famille $(X_n)_{n\geq 1}$ est uniformément intégrable.
   Indication : on pourra utiliser la question précédente et montrer que pour $a > 0$:

$$\mathbb{Q}(X_n > a) = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[X_n \mathbb{1}_{X_n > a}] = \int_{X_n > a} X_n d\mathbb{P}.$$

6. Montrer qu'il existe une variable aléatoire réelle X qui est $\mathbb{P}-$intégrable et telle que

$$\mathbb{Q}(A) = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[X \mathbb{1}_A] = \int_A X d\mathbb{P}, \;\; \forall A \in \mathcal{F}.$$

   On note $X = \frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}$, X est la dérivée de Radon-Nikodym de $\mathbb{Q}$ par rapport à $\mathbb{P}$.