Feuille d'exercices # 4

Exercice 1 : *Concentration sur 0 et 1*
Soit $(X_n)_{n\geq 0}$ une suite de variables aléatoires réelles. On pose $\mathcal{F}_n = \sigma(X_0, ..., X_n)$, $n \geq 0$. On suppose que $X_0 = a$ presque sûrement avec $a \in [0,1]$ et que pour $n \geq 0$,

$$\mathbb{P}\left(X_{n+1} = \frac{X_n}{2}\Big|\mathcal{F}_n\right) = 1 - X_n \quad \text{et} \quad \mathbb{P}\left(X_{n+1} = \frac{1+X_n}{2}\Big|\mathcal{F}_n\right) = X_n.$$

1. Montrer que, pour tout $n \geq 0$:

$$\mathbb{P}\left(X_{n+1} = \frac{X_n}{2} \text{ ou } X_{n+1} = \frac{1+X_n}{2}\right) = 1.$$

   En déduire que presque sûrement, pour tout $n \geq 0$, $X_n \in [0,1]$.
2. Montrer que $(X_n)_{n\geq 0}$ est une martingale qui converge presque sûrement et dans $\mathbb{L}^p$ pour tout $p \geq 1$ vers une variable aléatoire que l'on note X_∞.
3. Montrer que, pour tout $n \geq 0$:

$$\mathbb{E}[(X_{n+1} - X_n)^2] = \frac{1}{4}\mathbb{E}[X_n(1 - X_n)].$$

4. En déduire la valeur de $\mathbb{E}[X_\infty(1 - X_\infty)]$ puis la loi de X_∞.

Exercice 2 : *Vers la loi du logarithme itéré*
Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées de loi normale $\mathcal{N}(0,1)$, toutes définies sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Pour $n \geq 1$, on pose $S_n := X_1 + \ldots + X_n$. Le but de l'exercice est de montrer que, presque sûrement, on a

$$\limsup_{n\to+\infty} \frac{S_n}{\sqrt{2n\log\log n}} \leq 1.$$

Pour simplifier les expressions, on pose $h(x) = \sqrt{2n\log\log n}$ pour $x \geq e$.

1. Montrer que pour tout $\theta, c > 0$, on a

$$\mathbb{P}(\max_{k=1\ldots n} S_k > c) \leq e^{-\theta c}\mathbb{E}[e^{\theta S_n}].$$

   En déduire que $\mathbb{P}(\max_{k=1\ldots n} S_k > c) \leq e^{-\frac{c^2}{2n}}$.
2. Soit $K > 1$, majorer la probabilité

$$\mathbb{P}(\max_{k=1\ldots n} S_k > Kh(K^{n-1}))$$

   et en déduire que $\limsup_{n\to+\infty} \frac{S_n}{h(n)} \leq K$ presque sûrement. Conclure

Exercice 3 : *Ruine et grande fortune*
Soit $(S_n)_{n\geq 0}$ une marche aléatoire simple sur $\mathbb{Z}$: $S_0 := 0$, $S_n := X_1 + \ldots + X_n$ pour $n \geq 1$, où les variables X_i sont indépendantes et de même loi $0 < \mathbb{P}(X_i = 1) = p < 1$, $\mathbb{P}(X_i = -1) = 1 - p =: q$.

1. Pour $n \geq 0$, on pose $Z_n := (q/p)^{S_n}$. Montrer que $(Z_n)_{n\geq 0}$ est une martingale positive.
2. Montrer que pour $k > 0$,
$$\mathbb{P}(\sup_{n\geq 0} S_n \geq k) \leq \left(\frac{p}{q}\right)^k,$$
et que lorsque $q > p$:
$$\mathbb{E}\left[\sup_{n\geq 0} S_n\right] \leq \frac{q}{q-p}.$$

Exercice 4 : *Une série aléatoire*
Soient $(X_i)_{i\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées telles que $\mathbb{P}(X_1 = 1) = \mathbb{P}(X_1 = -1) = 1/2$ et $(\alpha_i)_{i\geq 1}$ une suite de réels. Montrer que si $\sum_{i\geq 1} \alpha_i^2 < \infty$ alors la série $\sum_{i\geq 1} \alpha_i X_i$ converge presque sûrement.

Exercice 5 : *Transformée de Lévy discrète*
Soit $(X_n)_{n\geq 0}$ une suite de variables indépendantes et de même loi $\mathbb{P}(X_i = 1) = \mathbb{P}(X_i = -1) = 1/2$. On pose $\mathcal{B}_0 := \{\emptyset, \Omega\}$, $\mathcal{B}_n := \sigma(X_1, \ldots, X_n)$ et $S_0 := 0$, $S_n := X_1 + \ldots + X_n$ pour $n \geq 1$. On considère la suite $(M_n)_{n\geq 0}$ définie par $M_0 := 0$ et pour $n \geq 1$:
$$M_n := \sum_{k=1}^{n} \text{signe}(S_{k-1}) X_k.$$

1. Quel est le compensateur de la sous-martingale $(S_n^2)_{n\geq 0}$?
2. Montrer que $(M_n)_{n\geq 0}$ est une martingale et calculer le compensateur de $(M_n^2)_{n\geq 0}$.
3. Quelle est la décompositin de Doob de $(|S_n|)_{n\geq 0}$? En déduire que M_n est mesurable par rapport à la tribu $\sigma(|S_1|, \ldots, |S_n|)$